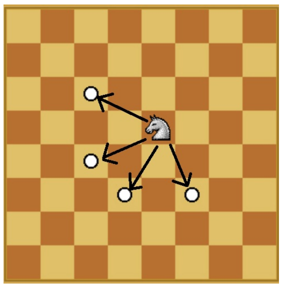
Pass 5: Spelteori - Uppgifter på passet med Lösningar

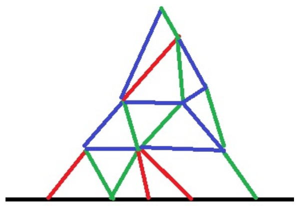
• MatteGym • Malmö Universitet • VT 2022 •
https://mattegym.uni.mau.se
Jonathan Nilsson och Magnus Jakobsson
Senast uppdaterad 11 maj 2022

1. Vi modifierar "plocka stenar" igen så att man nu endast kan välja på att plocka 1,3, eller 4 stenar. Vad är den vinnande strategin? Vilka sten-antal är vinnande för spelaren vars tur det är? *Tips: Börja med att utgå från ett lägre antal stenar, t.ex. 5.*

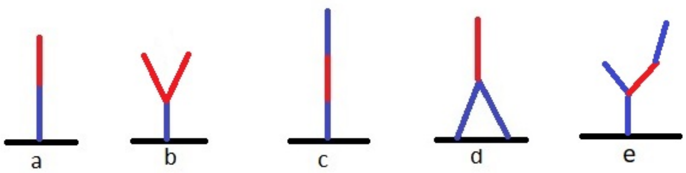
2. I spelet till höger kan pjäsen endast flyttas i de fyra markerade riktningarna. Den som inte längre kan göra ett drag förlorar. Vilka positiner är vinnande för spelaren vars tur det är?



3. Vem har en vinnande strategi i RGB-hackenbush positionen till höger?



4. Vi såg att den vänstra hackenbush-positionen (a) i bilden hade värdet $\frac{1}{2}$. Beräkna värdet av de övriga positionerna i bilden.



5. I hackenbush-positionen till höger har tornet oändligt många röda grenar, vi kallar tornets värde ϵ. Tornets värde är positivt eftersom blå spelaren alltid vinner efter sitt första drag, men visa att tornets värde är infitesimalt - mindre än varje positivt reellt tal.

6. Både spelet $\uparrow = \{0|*\}$ och spelet ϵ från föregående uppgift är positiva men oändligt små. Vilket av dem är störst?

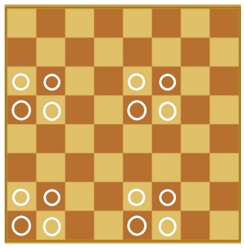
7. Vem vinner spelet $\uparrow + *$? Vem vinner $\uparrow + \uparrow + *$? (Vänster spelare, höger spelare, den som börjar, den som inte börjar?)

1. Börjar kan börja från 0 stenar och jobba sig uppåt, där man markerar varje position som vinnande (V) eller förlorande (F) för aktuell spelare (förutsatt optimalt spel). Då upptäcker man följande mönster:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V

   Sekvensen FVFVVVV upprepas alltså. Optimal strategi är alltså att alltid spela till ett stenantal som är lika med 0 eller 2 mod 7, alltså ett antal som är delbart med sju eller två mer än ett tal delbart med sju.

2. Arbetar man sig bakåt från nedre vänstra hörnan kan man avgöra vilka positioner som är vinnande och förlorande för aktuell spelare likt föregående uppgift. När pjäsen står på de vita ringarna är det en förlorande position, så en vinnande strategi är att alltid flytta till en sådan position.



3. Röd har kontroll över marken, så genom att spara dessa röda grenar till sist vinner den röda spelaren. Normalt sätt (om båda har pinnar på marken) är det ganska svårt att analysera denna typ av positioner. Då kan man bryta upp spelet i ett ”lila berg” vars spelvärde är något tal, och en ”grön djungel” som är ett infitesimalt tal.

4. Genom att ge motspelaren ett gratis antal drag och visa att den nya positionen är en noll-position kan man komma fram till spelens värden. Man finner då:

Spel	a	b	c	d	e
Värde	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{8}$

5. Jämför tornet mot ett liknande torn med 1 stycken röd bas fast ändligt många blå grenar på höjden. Detta andra torn har värdet $\frac{1}{2^n}$ där n är antalet blå grenar. Då är summan av spelen negativ eftersom röd alltid vinner med strategin att spegla motståndarens drag, om röd börjar klipper spelaren bara sitt oändliga torn vid en höjd över det blå tornets höjd. Detta visar att $0 < \epsilon < \frac{1}{2^n}$ för alla positiva n, epsilon är alltså positivt men ”oändligt litet”, sådana tal finns inte i det vanliga reella talsystemet men de finns bland de surreella talen. Vi också att vi kan skriva $\{0|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ eftersom röd kan göra ett drag till ett torn med en blå bas och n stycken röda grenar ovanför, vars värde är $\frac{1}{2^n}$.

6. Vi har $\epsilon >\uparrow$. För att visa det bildar vi $\epsilon - \uparrow = \epsilon + \downarrow = \{0|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\} + \{*|0\}$ där $* = \{0|0\}$. Vi behöver visa att vänster spelare (blå) alltid vinner detta spel. Den vinnande strategin för blå är att spela i $\downarrow$-komponenten tills denna försvinner och därefter klippa botten i det andra tornet. Ett sådant spel kan t.ex. se ut så här:

$$\epsilon + \downarrow \to^r \frac{1}{128} + \downarrow \to^b \frac{1}{128} + * \to^r \frac{1}{64} + * \to^l \frac{1}{64} \to^r \frac{1}{32} \to^l 0$$

7. Den som börjar vinner alltid $\uparrow + *$. Om röd (höger) spelare börjar spelar den i vänstra komponenten till positionen $* + * = 0$ och vinner. Om vänster börjar spelar den i $*$-komponenten till $\uparrow$ som vi sedan tidigare vet är positiv, och blå vinner. Spelet $\uparrow + \uparrow + *$ är dock positivt - vänster vinner alltid. Om vänster börjar spelar man till $\uparrow + \uparrow$ som klart är positiv och vänster vinner. Om höger börjar spelar den därför hellre i en av $\uparrow$-komponenterna till positionen $\uparrow + * + *$. Men eftersom $* + * = 0$ är även detta spel positivt. Uppgiften visar att $\uparrow$ inte är tillräckligt stor för att göra den fuzzy-positionen $*$ positiv, men $2\uparrow$ är det.