

Spel och surreella tal

Jonathan Nilsson

Malmö Universitet

10 Maj, 2022

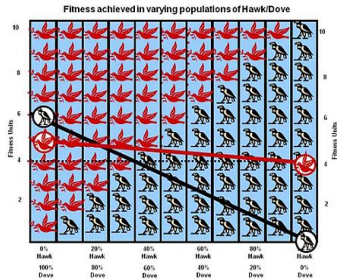
Olika brancher av spelteori

Förhandling: Geopolitik, löneförhandling, gisslandraman



Olika brancher av spelteori

Evolutionär spelteori



Olika brancher av spelteori

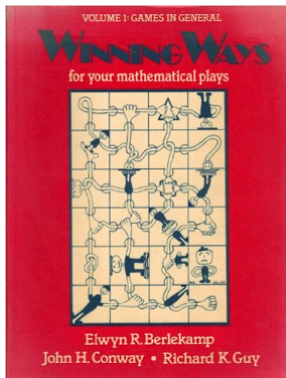
Bayesiansk spelteori

Type = "Civilian"		Sheriff's action	
		Shoot	Not
Suspect's action	Shoot	-3, -1	-1, -2
	Not	-2, -1	0, 0

Type = "Criminal"		Sheriff's action	
		Shoot	Not
Suspect's action	Shoot	0, 0	2, -2
	Not	-2, -1	-1, 1

Olika brancher av spelteori

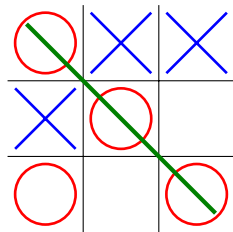
Kombinatorisk spelteori



Del I

Spel och strategi

Tre i rad



Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.



Vad är en vinnande strategi?

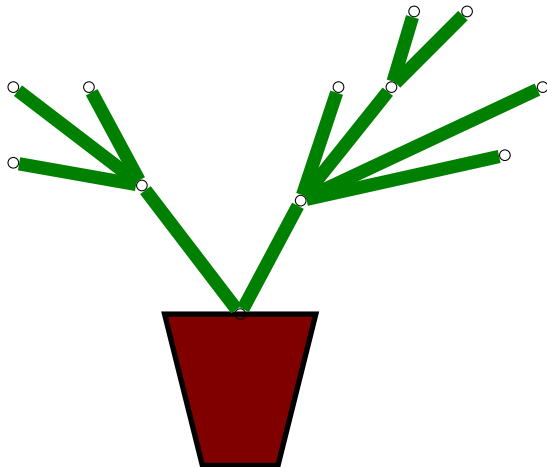
Plocka bönor

Spelarna turas om att plocka 1, 2, eller 3 bönor från högen. Spelaren som tar den sista bönan vinner.

Vad är en vinnande strategi? Den första spelaren vinner genom att alltid lämna en multipel av 4 bönor

Grön Hackenbush

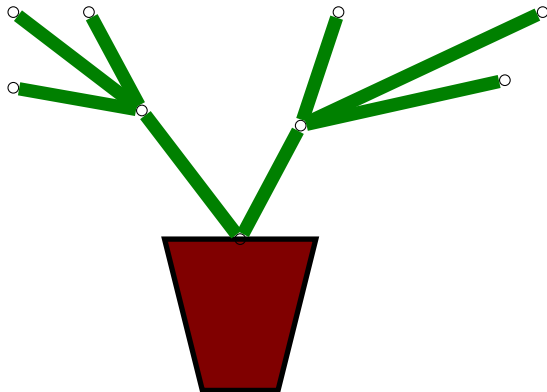
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

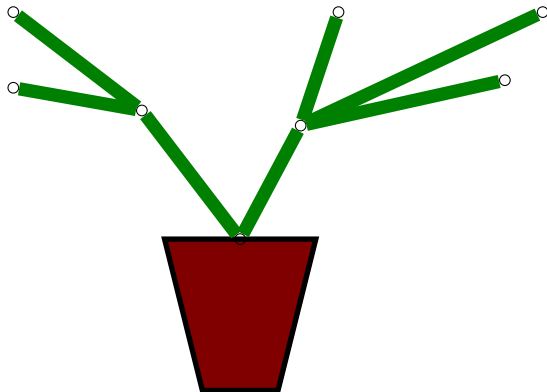
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

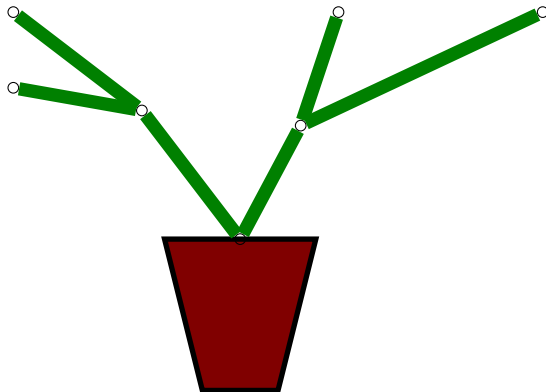
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

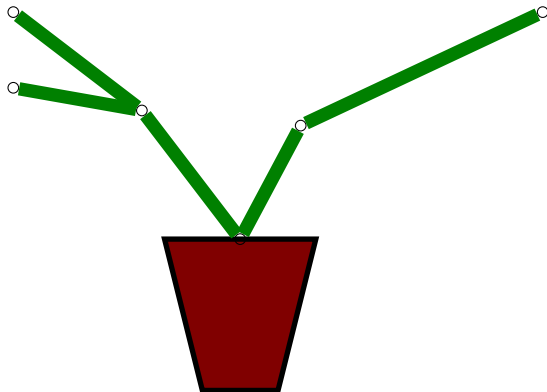
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

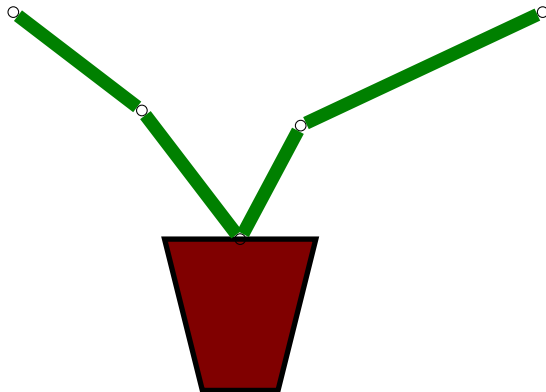
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

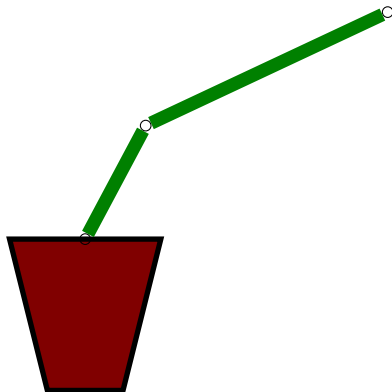
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

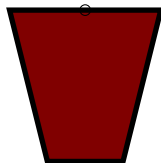
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Grön Hackenbush

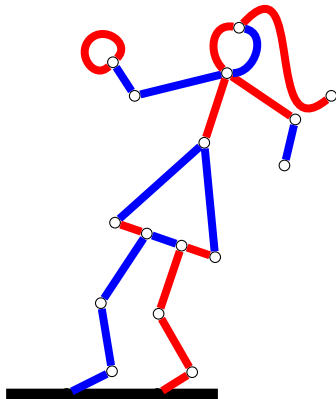
Spelarna turas om att hugga av grenar. Sådant som inte är kopplat till marken faller bort. Den som klipper sista grenen vinner.



Kan du hitta en vinnande strategi?

Blåröd Hackenbush

I den här versionen kan spelare 1 bara klippa blå grenar och spelare 2 kan bara klippa röda.



Summa 15



Spelarna turas om att plocka brikor med talen 1 – 9. Första spelaren som samlat ihop tre siffror vars summa är 15 vinner.

Summa 15

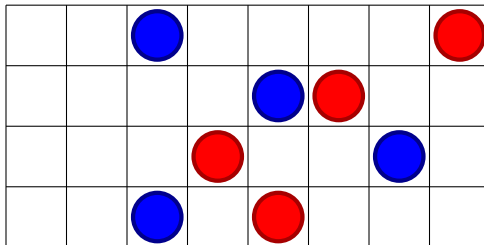
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Spelarna turas om att plocka brikor med talen 1 – 9. Första spelaren som samlat ihop tre siffror vars summa är 15 vinner.

Om första spelaren plockar 5 och sedan plockar 7, vad är en vinnande strategi för spelare 1?

Northcotts spel

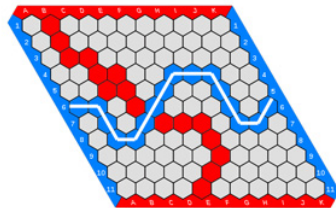
Markörerna kan flyttas ett antal steg vågrätt så länge man inte passerar en annan markör. En spelare kan enbart flytta markörer av sin egen färg.



Blå börjar, kan du hitta det vinnande draget?

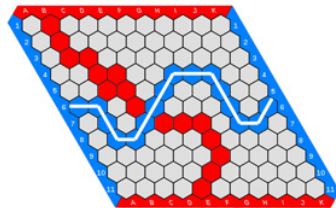
Hex

Blå försöker koppla ihop vänster sida med höger, och röd försöker koppla ihop toppen med botten.



Hex

Blå försöker koppla ihop vänster sida med höger, och röd försöker koppla ihop toppen med botten.



Finns det alltid en vinnare?

Col

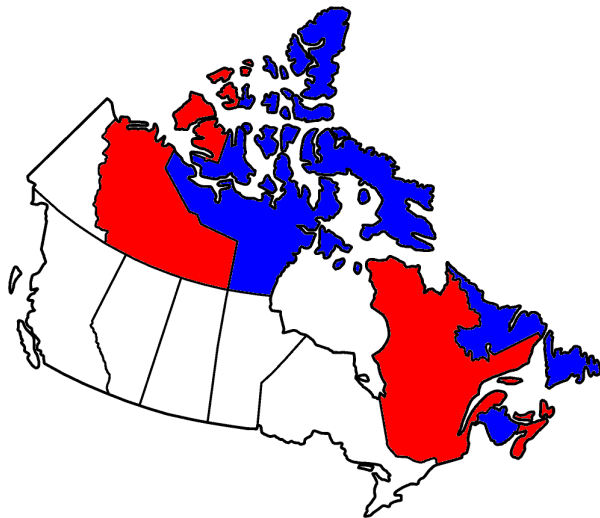
Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg.



Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.

Col

Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg.



Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.

Col

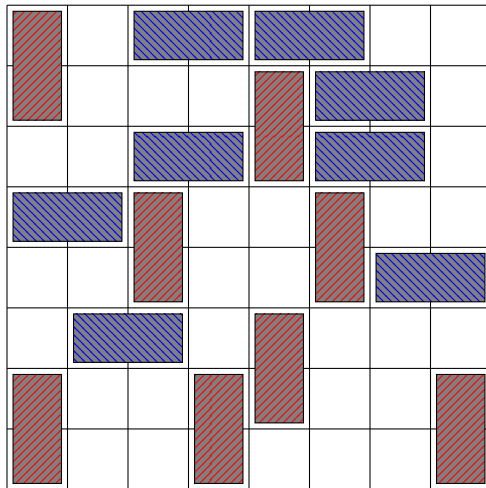
Blå och röd turas om att färga en karta. Angränsande områden får inte ha samma färg.



Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar.

Domineering

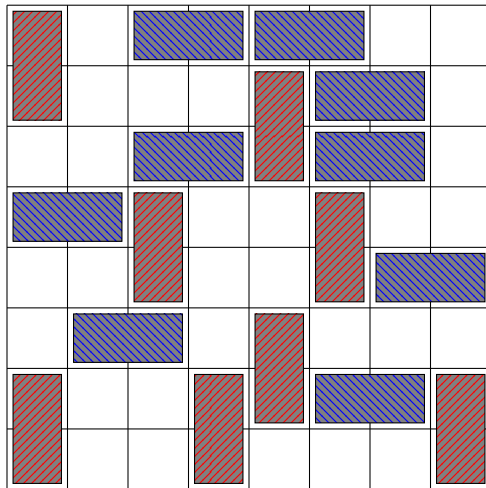
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

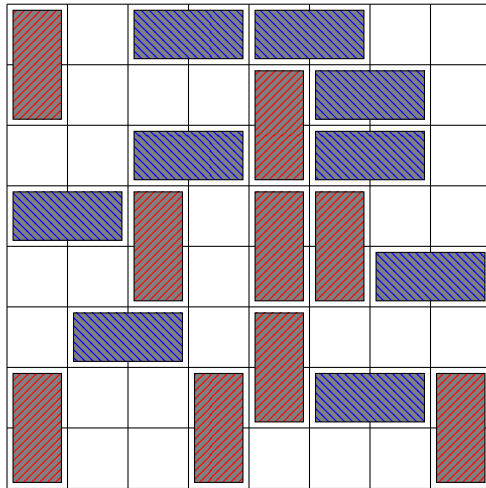
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

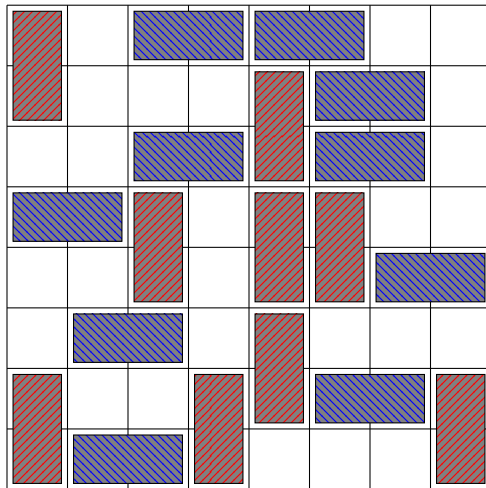
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

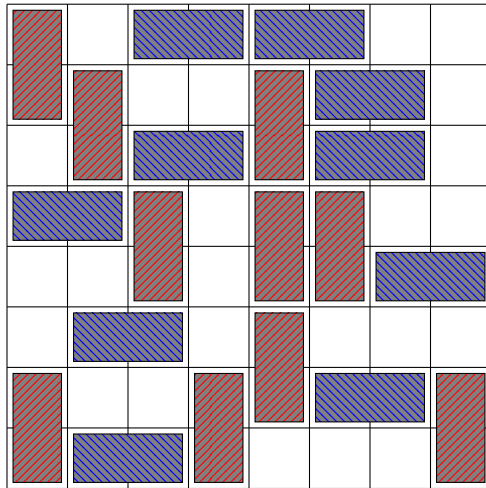
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

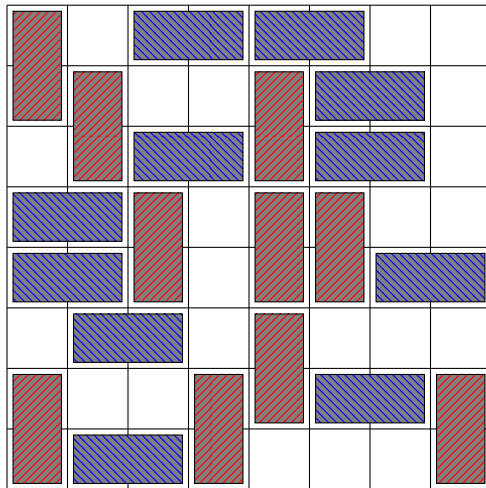
Domineering

Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Domineering

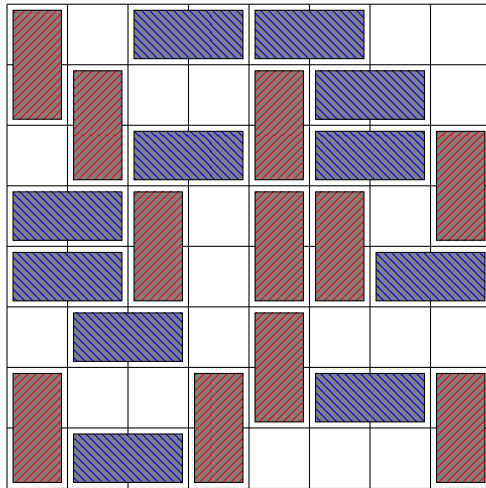
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

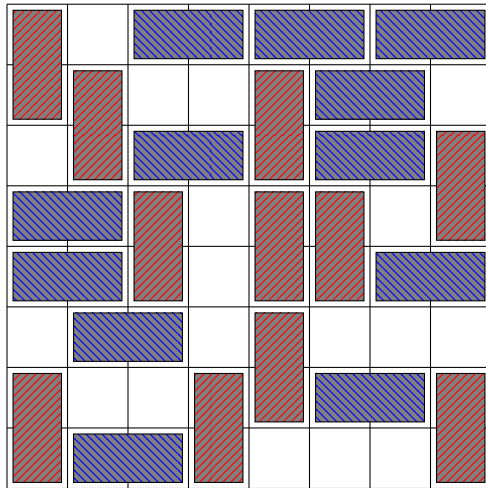
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

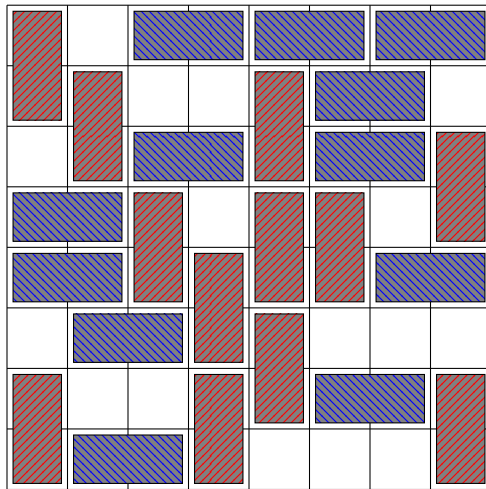
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

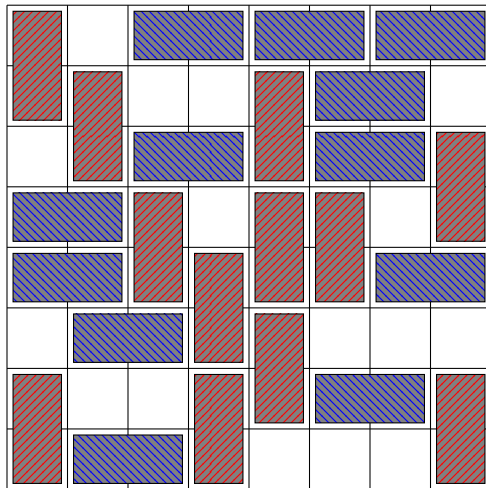
Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela?

Domineering

Blå spelar dominobrickor vågrätt, röd spelar lodrätt.



Blå börjar, den som inte kan göra ett drag förlorar. Hur bör man spela? Blå spelaren vinner.

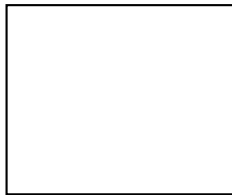
Nim

Spelarna turas om att plocka bönor, man får ta hur många bönor man vill, men bara ur en av högarna.



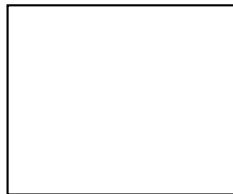
Nim

Spelarna turas om att plocka bönor, man får ta hur många bönor man vill, men bara ur en av högarna.



Nim

Spelarna turas om att plocka bönor, man får ta hur många bönor man vill, men bara ur en av högarna.



Härifrån vinner den andra spelaren genom att spegla motståndarens drag.

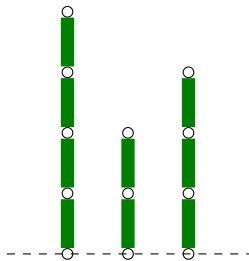
Samma eller olika spel?

Även om två spel kan se olika ut kan de vara "samma spel" från ett matematiskt perspektiv.

Samma eller olika spel?

Även om två spel kan se olika ut kan de vara "samma spel" från ett matematiskt perspektiv.

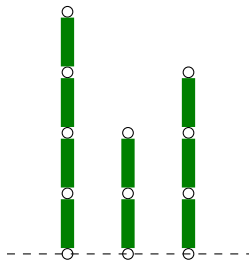
Exempelvis är Nim bara ett specialfall av grön Hackenbush med tre stjälar:



Samma eller olika spel?

Även om två spel kan se olika ut kan de vara "samma spel" från ett matematiskt perspektiv.

Exempelvis är Nim bara ett specialfall av grön Hackenbush med tre stjälkar:



2	7	6
9	5	1
4	3	8

Och summa 15 är bara tre i rad.

Kombinatoriska spel

Kombinatoriska spel

- Två spelare (Blå, Röd)
- Spelarna har full information om spelet
- En av spelarna vinner alltid
- Varje position har ändligt många möjliga drag
- Spelarna turas om att göra drag, blå börjar
- Den första spelaren som inte kan göra ett giltigt drag förlorar
- Spelet kan inte hålla på för evigt, varje spel slutar

Kombinatoriska spel

Kombinatoriska spel

- Två spelare (Blå, Röd)
- Spelarna har full information om spelet
- En av spelarna vinner alltid
- Varje position har ändligt många möjliga drag
- Spelarna turas om att göra drag, blå börjar
- Den första spelaren som inte kan göra ett giltigt drag förlorar
- Spelet kan inte hålla på för evigt, varje spel slutar

Man behöver inte skilja på "spel" och "position", varje position kan ses som startposition för ett nytt spel.

Kombinatoriska spel

Kombinatoriska spel

- Två spelare (Blå, Röd)
- Spelarna har full information om spelet
- En av spelarna vinner alltid
- Varje position har ändligt många möjliga drag
- Spelarna turas om att göra drag, blå börjar
- Den första spelaren som inte kan göra ett giltigt drag förlorar
- Spelet kan inte hålla på för evigt, varje spel slutar

Man behöver inte skilja på "spel" och "position", varje position kan ses som startposition för ett nytt spel. Hackenbush, Hex, Nim, Col, och Domineering uppfyller definitionen. Spel som tre-i-rad eller schack kan modifieras lite så att de också uppfyller definitionen.

Strategi

Definition

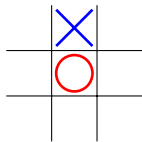
En **strategi** för blå är en fullständig beskrivning av exakt vilket drag man ska spela i varje spelposition.

Strategi

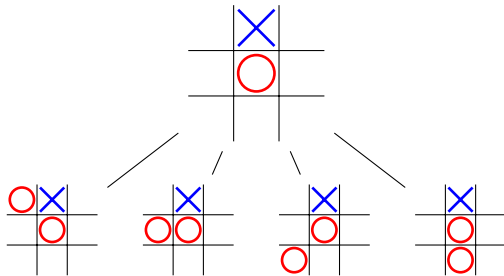
Definition

En **strategi** för blå är en fullständig beskrivning av exakt vilket drag man ska spela i varje spelposition.

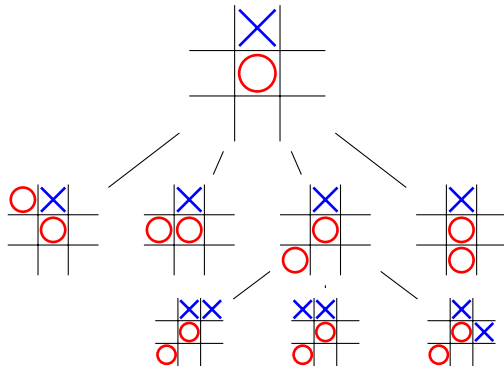
Strategi för Tre-i-rad



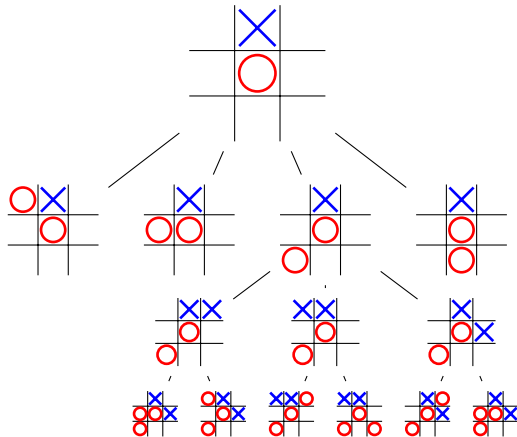
Strategi för Tre-i-rad



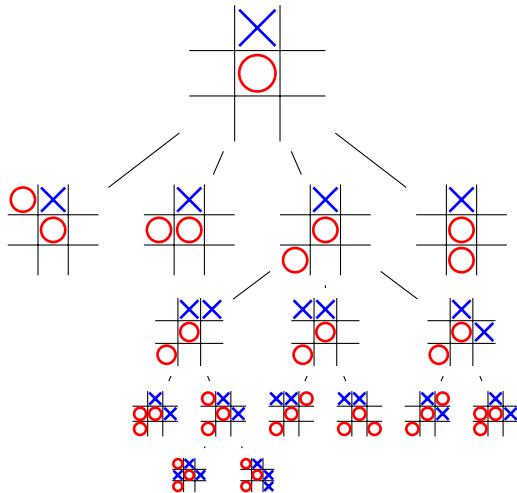
Strategi för Tre-i-rad



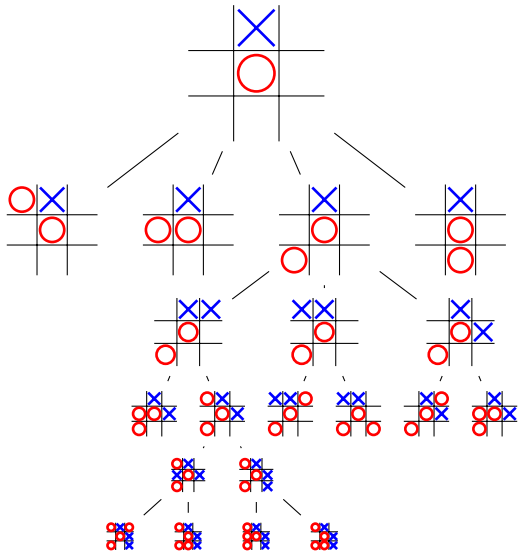
Strategi för Tre-i-rad



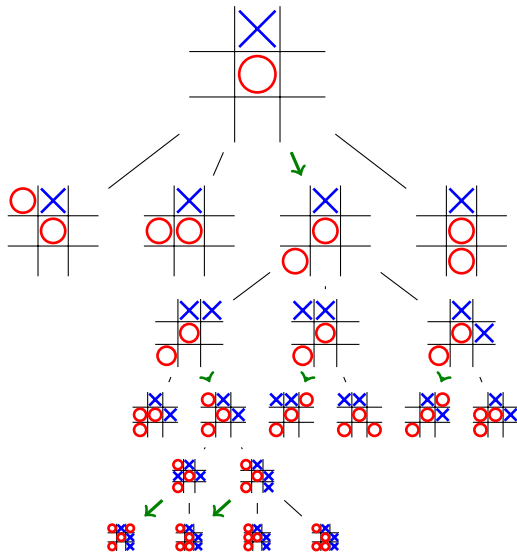
Strategi för Tre-i-rad



Strategi för Tre-i-rad



Strategi för Tre-i-rad



Vinnande strategier

Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Vinnande strategier

Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Typer av spel

För kombinatoriska spel finns bara två möjligheter: antingen har blå en vinnande strategi, eller så har blå en vinnande strategi.

Vinnande strategier

Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Typer av spel

För kombinatoriska spel finns bara två möjligheter: antingen har blå en vinnande strategi, eller så har blå en vinnande strategi. I spel som kan bli oavgjorda finns också möjligheten att båda spelarna kan nå oavgjort med optimalt spel.

Vinnande strategier

Kombinatoriska spel

En **vinnande strategi** för blå spelaren är en strategi som alltid leder till att blå vinner.

Typer av spel

För kombinatoriska spel finns bara två möjligheter: antingen har blå en vinnande strategi, eller så har blå en vinnande strategi. I spel som kan bli oavgjorda finns också möjligheten att båda spelarna kan nå oavgjort med optimalt spel.

Schack tillhör en av dessa kategorier, antingen så har vit en vinnande strategi, eller så har svart det, eller så blir det remi vid optimalt spel. Ingen vet vilket av detta som gäller, de flesta tror på det tredje.

Del II

Strategi i Nim

Nim-exempel

Nim kan spelas med olika startpositioner. Vilket drag är bäst i positionen nedan?



Nim-exempel

Nim kan spelas med olika startpositioner. Vilket drag är bäst i positionen nedan?



Nim-exempel

Nim kan spelas med olika startpositioner. Vilket drag är bäst i positionen nedan?



Nu lämnar varje drag två högar av olika storlek, eller tre högar varav två har samma storlek.

Nim-Summor

För att ta reda på om en position är vinnande eller förlorande (för aktuell spelare) kan man beräkna högarnas **Nim-summa**. Detta kan göras enligt följande:

Nim-Summor

För att ta reda på om en position är vinnande eller förlorande (för aktuell spelare) kan man beräkna högarnas **Nim-summa**. Detta kan göras enligt följande:

Nim-summan av två högar - Algoritm

- Uttryck antal bönor i var hög som en summa av $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ (alltså binärt).

Nim-Summor

För att ta reda på om en position är vinnande eller förlorande (för aktuell spelare) kan man beräkna högarnas **Nim-summa**. Detta kan göras enligt följande:

Nim-summan av två högar - Algoritm

- Uttryck antal bönor i var hög som en summa av $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ (alltså binärt).
- Om det i de olika högarna finns två högar av samma storlek tar de högarna ut varandra, cancellera dem parvis.

Nim-Summor

För att ta reda på om en position är vinnande eller förlorande (för aktuell spelare) kan man beräkna högarnas **Nim-summa**. Detta kan göras enligt följande:

Nim-summan av två högar - Algoritm

- Uttryck antal bönor i var hög som en summa av $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ (alltså binärt).
- Om det i de olika högarna finns två högar av samma storlek tar de högarna ut varandra, kancellera dem parvis.
- Ta summan av de kvarvarande högarna. Resultatet kallas **Nim-summan** av högarna, notation $\oplus$.

Nim-Summor

För att ta reda på om en position är vinnande eller förlorande (för aktuell spelare) kan man beräkna högarnas **Nim-summa**. Detta kan göras enligt följande:

Nim-summan av två högar - Algoritm

- Uttryck antal bönor i var hög som en summa av $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ (alltså binärt).
- Om det i de olika högarna finns två högar av samma storlek tar de högarna ut varandra, cancellera dem parvis.
- Ta summan av de kvarvarande högarna. Resultatet kallas **Nim-summan** av högarna, notation $\oplus$.

Om Nim-summan av en position är 0 är positionen förlorande, annars är den vinnande. Otherwise it's a winning position.

Exempel

Betrakta föregående Nim-position med högstorlekar $(3, 2, 5)$.

Exempel

Betrakta föregående Nim-position med högstorlekar $(3, 2, 5)$.

Vi har

$$3 \oplus 2 \oplus 5 = (1 + 2) \oplus (2) \oplus (1 + 4) = 4$$

så detta är en vinnande position.

Exempel

Betrakta föregående Nim-position med högstorlekar (3, 2, 5).

Vi har

$$3 \oplus 2 \oplus 5 = (1 + 2) \oplus (2) \oplus (1 + 4) = 4$$

så detta är en vinnande position. Genom att ta bort 4 bönor från sista högen lämnar vi nästa spelare med en position ars Nim-summa är

$$3 \oplus 2 \oplus 1 = (1 + 2) \oplus (2) \oplus (1) = 0,$$

en förlorande position.

Ett andra exempel

Ett problem

Betrakta Nim-positionen med högstorlekar $(20, 19, 13)$.
Är det en vinnande position? Vilket drag är bäst?

Ett andra exempel

Ett problem

Betrakta Nim-positionen med högstorlekar (20, 19, 13).
Är det en vinnande position? Vilket drag är bäst?

Nim-summan är

$$20 \oplus 19 \oplus 13 = (16 + 4) \oplus (16 + 2 + 1) \oplus (8 + 4 + 1) = 8 + 2 = 10$$

Så positionen är vinnande, men många drag är möjliga. Hur hittar vi ett vinnande drag?

Att hitta ett vinnande drag

Algorithm

- Låt T vara Nim-summan av alla högar. Vi hittar en högstorlek S som uppfyller $T \oplus S < S$.
- Reducera den högen till storlek $T \oplus S$

Då blir Nim-summan av spelet 0.

Att hitta ett vinnande drag

Algorithm

- Låt T vara Nim-summan av alla högar. Vi hittar en högstorlek S som uppfyller $T \oplus S < S$.
- Reducera den högen till storlek $T \oplus S$

Då blir Nim-summan av spelet 0.

Varför fungerar detta? Antag att högstorlekarna är (S_1, S_2, S_3) och vi låt $T = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$. Om t.ex. $T \oplus S_2 < S_2$ så gör vi ett drag till positionen $(S_1, S_2 \oplus T, S_3)$. Nim-summan av denna position är

$$S_1 \oplus (S_2 \oplus T) \oplus S_3 = (S_1 \oplus S_2 \oplus S_3) \oplus T = T \oplus T = 0.$$

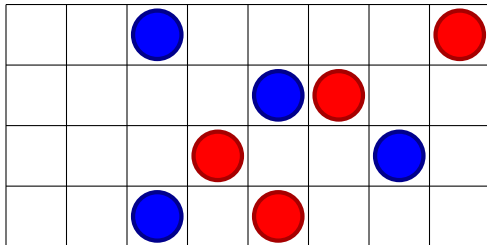
Sprague-Grundys Sats

Sats

Varje *opartiskt* spel är equivalent med ett Nim-spel (med en hög).

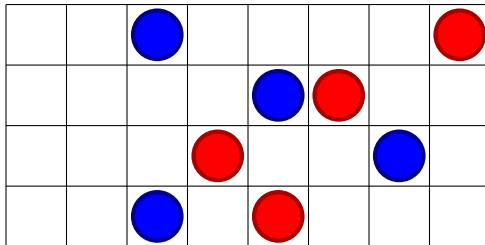
Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

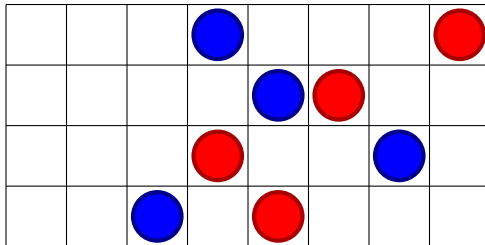
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

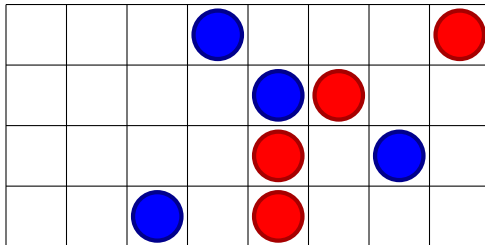
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

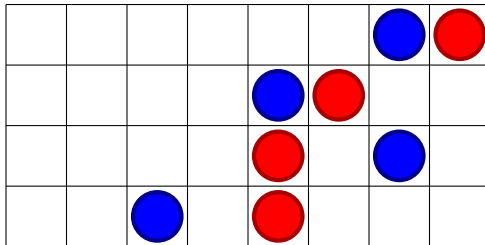
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

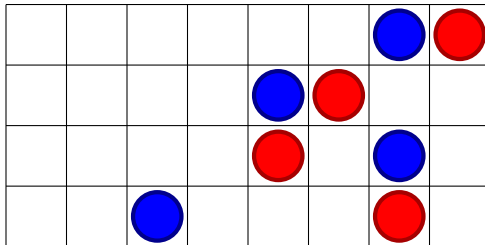
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

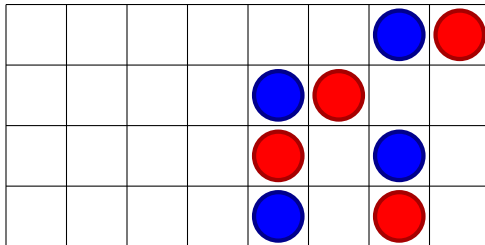
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

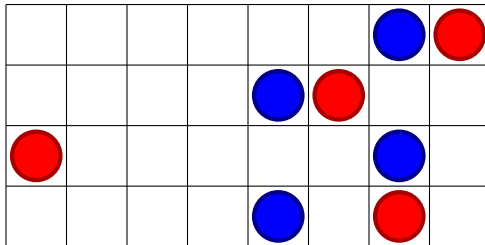
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

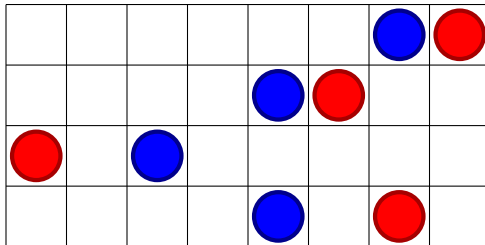
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

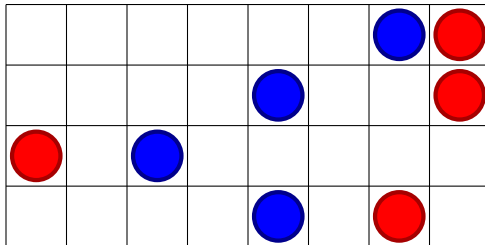
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

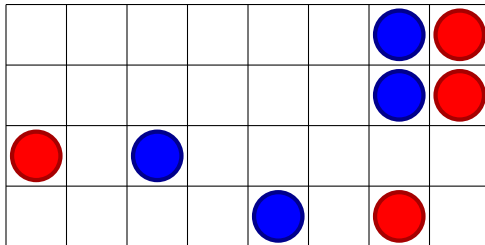
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

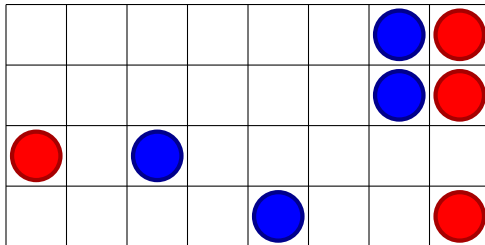
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

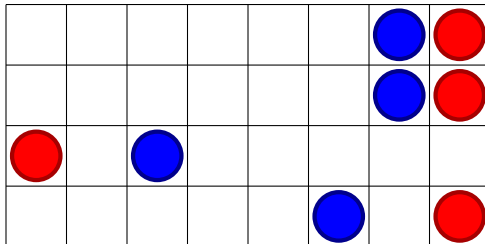
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

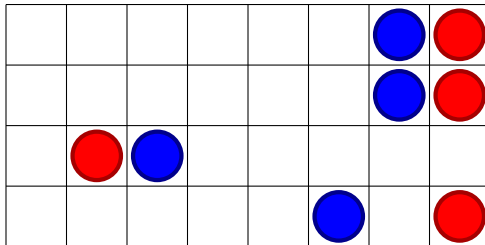
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

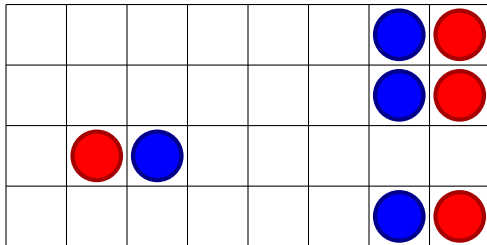
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

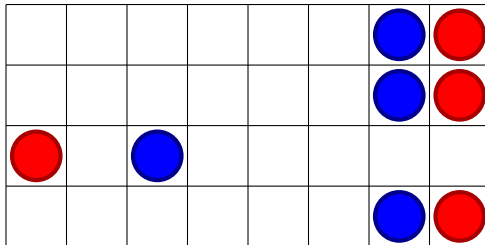
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

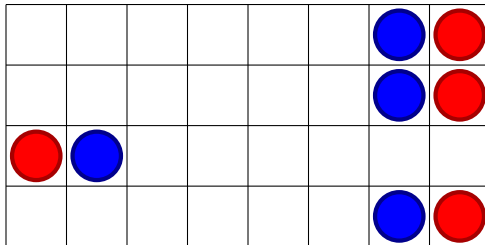
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

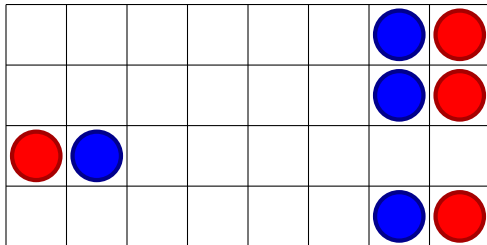
Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren.

Northcotts spel är bara Nim i en annan skepnad

Vad är kopplingen mellan spelen? Vilket drag är bäst för blå nedan?



Högstorlekarna är avstånden mellan röd och blå plupp i varje rad. När motståndaren flyttar pluppen iväg från din plupp kan du kancellera draget genom att flytta din plupp lika många steg mot motståndaren. Blå vinner!

Del III

Spel som tal

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L|G^R\}$ där G^L och G^R själva är en **mängd** spel.

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L|G^R\}$ där G^L och G^R själva är en **mängd** spel.

Vi tänker på G^L som mängden spel (eller positioner) som blå kan spela till från G , och G^R är positioner som röd kan spela till från G . Symbolen håller inte reda på vems tur det är.

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L|G^R\}$ där G^L och G^R själva är en **mängd** spel.

Vi tänker på G^L som mängden spel (eller positioner) som blå kan spela till från G , och G^R är positioner som röd kan spela till från G . Symbolen håller inte reda på vems tur det är. Exempelvis har vi

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{X} \text{O} \\ \hline \text{O} \text{O} \\ \hline \text{X} \text{X} \text{O} \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{X} \text{O} \text{X} & \text{X} \text{O} \\ \hline \text{O} \text{O} & \text{O} \text{O} \text{X} \\ \hline \text{X} \text{X} \text{O} & \text{X} \text{X} \text{O} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \text{X} \text{O} \text{O} & \text{X} \text{O} \\ \hline \text{O} \text{O} & \text{O} \text{O} \text{O} \\ \hline \text{X} \text{X} \text{O} & \text{X} \text{X} \text{O} \\ \hline \end{array} \right\}$$

Notation

Definition

Ett **spel** G är en symbol $\{G^L|G^R\}$ där G^L och G^R själva är en **mängd** spel.

Vi tänker på G^L som mängden spel (eller positioner) som blå kan spela till från G , och G^R är positioner som röd kan spela till från G . Symbolen håller inte reda på vems tur det är. Exempelvis har vi

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{X O} \\ \hline \text{O O} \\ \hline \text{X X} \\ \hline \text{O} \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{X O X} \\ \hline \text{O O} \\ \hline \text{X X O} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \text{X O} \\ \hline \text{O O X} \\ \hline \text{X X O} \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|} \hline \text{X O O} \\ \hline \text{O O} \\ \hline \text{X X O} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \text{X O} \\ \hline \text{O O O} \\ \hline \text{X X O} \\ \hline \end{array} \right\}$$

och

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right\}$$

Att generera spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R som tidigare genererade spel.

Att generera spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R som tidigare genererade spel.
Först, enligt definitionen:

$\{|\}$ är ett spel.

Att generera spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R som tidigare genererade spel.
Först, enligt definitionen:

$\{|\}$ är ett spel.

Vi kallar detta för **nollpositionen** och skriver $0 := \{|\}$. Den vars tur det är förlorar.

Att generera spel

Vi kan rekursivt generera spel där vi väljer G^L och G^R som tidigare genererade spel.
Först, enligt definitionen:

$\{|\}$ är ett spel.

Vi kallar detta för **nollpositionen** och skriver $0 := \{|\}$. Den vars tur det är förlorar.

Vi säger att 0 är i första generationen.

Den andra generationen

I den andra generationen hittar vi

$$1 := \{0|\} \quad \text{och} \quad -1 := \{|0\}$$

I spelet 1 har blå spelaren ett övertag på ett drag, och kommer alltid att vinna oavsett vem som börjar.

Den andra generationen

I den andra generationen hittar vi

$$1 := \{0|\} \quad \text{och} \quad -1 := \{|\}0\}$$

I spelet 1 har blå spelaren ett övertag på ett drag, och kommer alltid att vinna oavsett vem som börjar.

Vi har också

$$* := \{0|0\}$$

I detta spelet vinner dem som *börjar*.

Tredje generationen

I denna generation hittar vi

$$2 := \{1|\} \quad \text{och} \quad -2 := \{|\!-\!1\}$$

I spelet 2 har blå spelare ett två-drags-övertag och vinner därför alltid.

Tredje generationen

I denna generation hittar vi

$$2 := \{1|\} \quad \text{och} \quad -2 := \{|\!-\!1\}$$

I spelet 2 har blå spelare ett två-drags-övertag och vinner därför alltid.

Vi har också

$$\uparrow := \{0|*\} \quad \text{och} \quad \downarrow := \{*|0\}$$

Tredje generationen

I denna generation hittar vi

$$2 := \{1|\} \quad \text{och} \quad -2 := \{|\ -1\}$$

I spelet 2 har blå spelare ett två-drags-övertag och vinner därför alltid.

Vi har också

$$\uparrow := \{0|*\} \quad \text{och} \quad \downarrow := \{*|0\}$$

och många fler:

$$\begin{array}{cccccccc} \{*|*\} & \{*|1\} & \{*|\ -1\} & \{**\} & \{*\} & \{|\} & \{1|\} & \{-1|\} \\ \{1|0\} & \{1|1\} & \{1|\ -1\} & \{-1|0\} & \{-1|1\} & \{-1|\ -1\} & & \end{array}$$

Den n 'te generationen

Här hittar vi

$$n + 1 := \{n|\} \quad \text{och} \quad -n - 1 := \{| - n\}$$

och flera.

Oändliga generationer

Enligt vår definition är

$$\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$$

också ett spel.

Oändliga generationer

Enligt vår definition är

$$\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$$

också ett spel.

Även om blå kan välja mellan oändligt många drag tar spelet slut efter detta drag.

...och så vidare

Vi kan sedan fortsätta att definiera

$$\omega + 1 := \{\omega\}$$

och så vidare.

Summan av spel

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ och $H = \{H^L | H^R\}$ vara två spel.

Definition

Vi definierar $G + H$ som spelet

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | G^R + H, G + H^R\}$$

Summan av spel

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ och $H = \{H^L | H^R\}$ vara två spel.

Definition

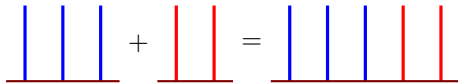
Vi definierar $G + H$ som spelet

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | G^R + H, G + H^R\}$$



Detta betyder att i varje drag väljer spelaren om den vill göra ett drag från antingen det första eller det andra spelet.

Exempel



The diagram shows an addition of two sets of vertical lines. On the left, there are three blue vertical lines standing on a horizontal red base. This is followed by a plus sign. To the right of the plus sign are two red vertical lines standing on a horizontal red base. This is followed by an equals sign. To the right of the equals sign are five vertical lines standing on a single horizontal red base: the first three are blue and the last two are red.

Exempel

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & | \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline | & | \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline | & | & | & | & | \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & | \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & | \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & | \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline | \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & | & | \\ \hline \end{array} \right\}$$

Fyra typer av spel

Definition

Ett spel G kallas...

- **Positivt** om blå alltid vinner. Vi skriver $G > 0$.
- **Negativt** om röd alltid vinner. Vi skriver $G < 0$.
- **Noll** Om den som börjar alltid förlorar. Vi skriver $G = 0$.
- **Fuzzy** Om den som börjar alltid vinner. Vi skriver $G || 0$.

Negationen av ett spel

Definition

Om G är ett spel definierar vi

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

Detta betyder att $-G$ är samma spel som G fast med spelarnas roller omvända.

Negationen av ett spel

Definition

Om G är ett spel definierar vi

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\}$$

Detta betyder att $-G$ är samma spel som G fast med spelarnas roller omvända.

Vi noterar att $G + (-G)$ slutar på samma sätt som noll-spelet. Den andra spelaren kan kopiera motståndarens drag i det andra spelet, och kommer därför alltid att kunna göra det sista giltiga draget.

Att ordna spel

Definition

Om G och H är spel skriver vi

- $G > H$ om $G - H > 0$
- $G < H$ om $G - H < 0$
- $G = H$ om $G - H = 0$
- $G || H$ om $G - H || 0$.

Att ordna spel

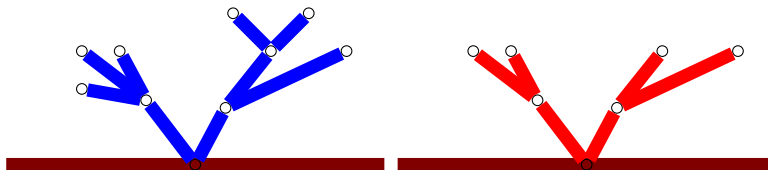
Definition

Om G och H är spel skriver vi

- $G > H$ om $G - H > 0$
- $G < H$ om $G - H < 0$
- $G = H$ om $G - H = 0$
- $G || H$ om $G - H || 0$.

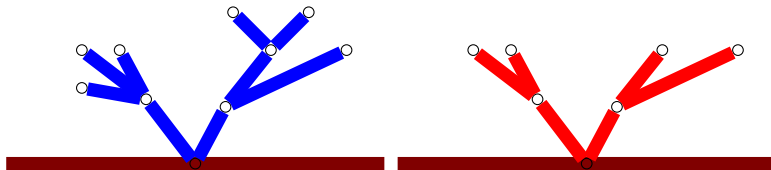
Om $G = H$ tänker vi på G och H som samma spel. Relationen $<$ är nu en partial ordningsrelation på mängden (ekvivalensklasser av) kombinatoriska spel.

Ekvivalenta spel



I detta Hackenbush-spel G har Blå ett klart övertag, med 9 klippbara grenar mot röds 6 grenar. Därför vinner blå vem som än startar.

Ekvivalenta spel



I detta Hackenbush-spel G har Blå ett klart övertag, med 9 klippbara grenar mot röds 6 grenar. Därför vinner blå vem som än startar. Detta spel har samma drag-övertag som



Vilket är samma som spelet $3 = \{2|\}$. Så vi skriver $G = 3$ också.

Aritmetik för några spel

Vi hade $*$ = $\{0|0\}$ och $\uparrow$ = $\{0|*\}$ och $\downarrow$ = $\{0|*\}$. Vi har

$$* + * = \{*|*\} = 0$$

Aritmetik för några spel

Vi hade $*$ = $\{0|0\}$ och $\uparrow$ = $\{0|*\}$ och $\downarrow$ = $\{0|*\}$. Vi har

$$* + * = \{*|*\} = 0$$

$$\uparrow + \downarrow = 0$$

Aritmetik för några spel

Vi hade $*$ = $\{0|0\}$ och $\uparrow$ = $\{0|*\}$ och $\downarrow$ = $\{0|*\}$. Vi har

$$* + * = \{*|*\} = 0$$

$$\uparrow + \downarrow = 0$$

$$\{\uparrow | \downarrow\} = *$$

Numeriska spel

Definition

Ett spel $G = \{G^L | G^R\}$ kallas **numeriskt** om det inte finns några spel $R \in G^R$ och $L \in G^L$ som uppfyller $R \leq L$.

Numeriska spel

Definition

Ett spel $G = \{G^L | G^R\}$ kallas **numeriskt** om det inte finns några spel $R \in G^R$ och $L \in G^L$ som uppfyller $R \leq L$.

Till exempel är $\{2|4, 3\}$ numeriskt, men $* = \{0|0\}$ är inte det.

Ett resultat om Col

Proposition

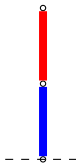
Varje Col-position är ekvivalent med antingen

$$X \quad \text{eller} \quad X + *$$

för något **numeriskt** spel X .

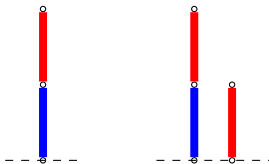
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionen av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



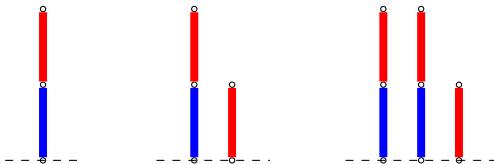
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionen av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



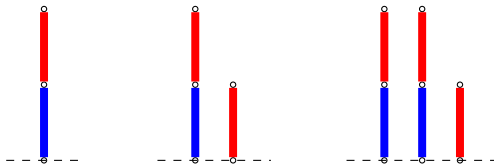
Ett litet övertag

Vi tittar på Hackenbushversionen av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



Ett litet övertag

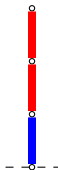
Vi tittar på Hackenbushversionen av $\{0|1\}$
Vem vinner i följande position?



Detta visar att den ursprungliga positionen motsvarar precis ett halvt drags övertag för blå.

Många spel-värden

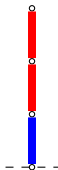
Man kan vidare visa att positionen



är värd $\frac{1}{4}$ av ett drag för blå, o.s.v.

Många spel-värden

Man kan vidare visa att positionen



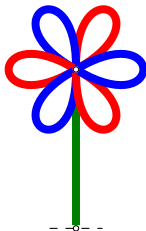
är värd $\frac{1}{4}$ av ett drag för blå, o.s.v.

En Hackenbush-sats

- Varje numeriskt spel med ändligt många positioner kan modelleras som en blå-röd Hackenbush position.
- För varje dyadiskt rationellt tal r så finns det en blå-röd Hackenbush-position vars värde är r .

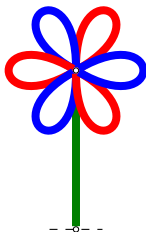
En Fuzzy-blomma

Vad är följande Hackenbush position värd?



En Fuzzy-blomma

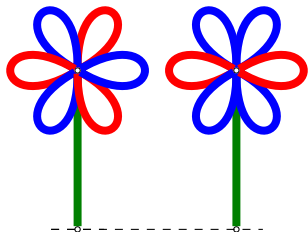
Vad är följande Hackenbush position värd?



Klipper man den gröna stjälken tar spelet slut så den som börjar vinner. Detta spel är "fuzzy".

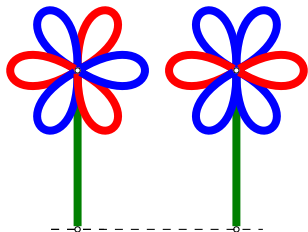
Blommor

Hur mycket är följande position värd?



Blommor

Hur mycket är följande position värd?



Den som klipper första stjälken förlorar, så blå vinner eftersom det finns fler blå kronblad.

Aritmetik för några spel

Låt $\epsilon := \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$. Båda dessa spel är mindre än varje bråktal. Vilken är minst?

Aritmetik för några spel

Låt $\epsilon := \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$. Båda dessa spel är mindre än varje bråktal. Vilken är minst?

Vi beräknar

$$\epsilon - \uparrow = \epsilon + \downarrow = \epsilon + \{*\mid 0\} = \{0 + \downarrow, * + \epsilon \mid \frac{1}{2^k} + \downarrow, \epsilon + 0\}$$

Aritmetik för några spel

Låt $\epsilon := \{0|\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ och $\uparrow = \{0|*\}$. Båda dessa spel är mindre än varje bråktal. Vilken är minst?

Vi beräknar

$$\epsilon - \uparrow = \epsilon + \downarrow = \epsilon + \{*\mid 0\} = \{0 + \downarrow, * + \epsilon \mid \frac{1}{2^k} + \downarrow, \epsilon + 0\}$$

$$\{*\mid \epsilon \mid \frac{1}{2^k} + \downarrow\} > 0 \quad \text{eftersom blå alltid vinner.}$$

Att utvärdera ett spel

Hur kan vi beräkna värdet för ett spel som

$$G = \{1, 2 | \frac{5}{2}, 3\}$$

?

Att utvärdera ett spel

Hur kan vi beräkna värdet för ett spel som

$$G = \{1, 2 | \frac{5}{2}, 3\}$$

?

Vi kan ta bort 1 från vänster och 3 från höger, eftersom båda spelar optimalt, så

$$G = \{2 | \frac{5}{2}\}$$

Enkelhetsregeln

Sats

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ vara ett numeriskt spel. Låt H vara spelet från tidigast generation så att $G^R < H < G^L$. Då är

$$G = H$$

Enkelhetsregeln

Sats

Låt $G = \{G^L | G^R\}$ vara ett numeriskt spel. Låt H vara spelet från tidigast generation så att $G^R < H < G^L$. Då är

$$G = H$$

Till exempel, $\{\frac{5}{2} | \frac{9}{2}\} = 3$.

Del IV

Surreella tal

Numeriska spel

Definition

Mängden* *numeriska spel* kallas för de **surreella talen**.

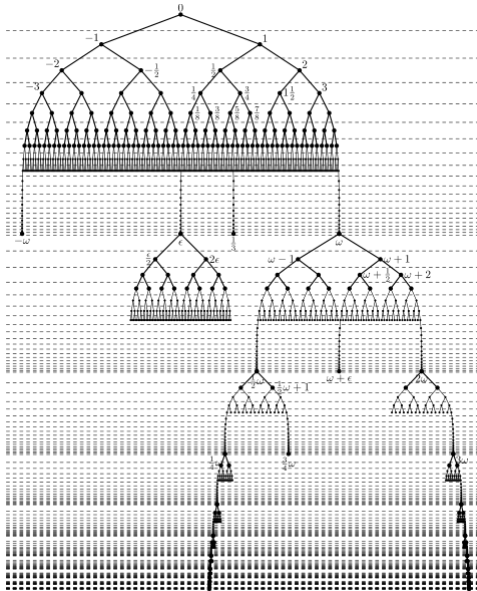
Numeriska spel

Definition

Mängden* *numeriska spel* kallas för de **surreella talen**.

- Man kan addera och multiplicera surreella tal, de bildar en *talkropp*
- De surreella talen är totalt ordnade under spel-relationen $\leq$.

Visualisering



Maximalitetsegenskapen

Maximalitetsegenskapen

Varje reellt tal kan ses som ett surreellt tal. Därför kan de reella talen bäddas in i de surreella. Faktum är att varje totalt ordnat talkropp kan bäddas in i de surreella talen, så de surreella talsystemet är det största i denna mening.