

## Pass 5: Spelteori

---

- MatteGym • Malmö Universitet • VT 2022 •
- <https://mattegyms.uni.mau.se>  
Jonathan Nilsson och Magnus Jakobsson  
Senast uppdaterad 11 maj 2022
- 

### Kombinatoriska spel

Ett **kombinatoriskt spel** är ett spel för två spelare som turas om att göra drag. När det inte längre finns några giltiga drag tar spelet slut, den första spelaren som inte kan göra ett drag förlorar. Kombinatoriska spel får inte heller ha någon slump inblandad, och inte ha någon hemlig information - all information om spelets tillstånd är känd för båda spelarna. Ibland kräver man också att varje spelposition ska ha ett ändligt antal möjliga drag, och att varje spel ska ta slut efter ändligt många drag.

Typexempel på kombinatoriska spel är tre-i-rad, schack, eller Go (förutom att dessa också kan bli oavgjorda, men om man bestämmer att den andra spelaren vinner när det blir oavgjort så uppfyller de definitionen, se t.ex. "Armageddonschack").

Ett spel kan visualiseras som ett spelträd - en riktad graf där noderna är alla möjliga positioner i spelet, och det finns en kant mellan två positioner om det finns ett giltigt drag mellan dem.

En **strategi** i ett spel är en fullständig beskrivning av hur man bör vandra i spelträdet, alltså en regel som säger vilket drag man ska göra från varje möjlig position. En vinnande strategi är en strategi som alltid vinner oavsett vad den andra spelaren gör.

I spel såsom schack är det praktiskt omöjligt att hinna en vinnande strategi eftersom antalet möjliga positioner är så stort, men med en dator kan man söka igenom spelträdet ett par nivåer framåt för att hitta ett bra drag. På passet ska vi fokusera på enklare spel som är lättare att analysera.

### Exempel 1 - Plocka stenar

I spelet "plocka stenar" finns det en hög med 20 stenar. De två spelarna turas om att plocka antingen en eller två stenar från högen. Den som inte kan göra ett giltigt drag förlorar, så vinnaren är alltså den som tar sista stenen.

Här finns det en enkel vinnande strategi för den första spelaren - börja med att plocka två stenar så att det finns 18 kvar, och gör därefter motsatsen till vad den andra spelaren gör, då försvinner det totalt tre stenar varje runda, och eftersom 18 är delbart med 3 kommer den första spelaren att plocka den sista stenen.

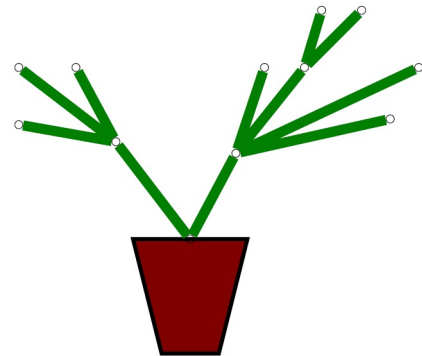
### Exempel 2 - Summa15

I det här spelet finns nio brickor med siffrorna 1 – 9 på. De två spelarna turas om att plocka brickor från högen. Spelaren som först samlat ihop tre brickor vars summa är 15 vinner.

Såhär kan en spelomgång se ut: Spelare A tar bricka 5, spelare B tar bricka 1, och spelare A tar bricka 6. Nu måste B ta 4 för att inte förlora och spelare A tar då bricka 7. Nu kommer A att vinna eftersom spelaren har två hot: att ta bricka 2 och bilda summan  $2+6+7=15$ , eller att ta bricka 3 och bilda  $7+5+3=15$ , B kan inte stoppa båda hoten.

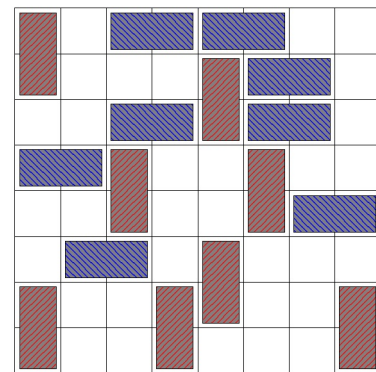
### Exempel 3 - Hackenbush

I det här spelet finns ett "träd" med gröna grenar. I ett drag får man hugga bort en av grenarna. Alla grenar som inte är kopplade till marken faller också bort. Förlorar gör som vanligt den som inte kan göra ett giltigt drag, vinnaren är alltså den som hugger sista grenen.



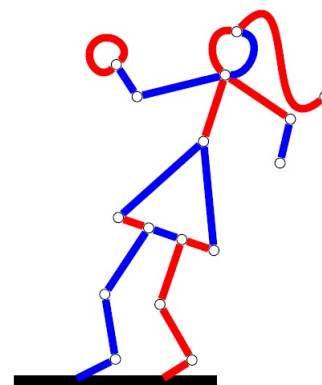
### Exempel 4 - Domineering

Här turas spelarna om att placera dominobrickor på ett schackbräde. Varje bricka täcker två angränsande rutor. Blå spelaren får bara lägga brickor vågrätt och den röda spelaren får bara lägga brickor lodrätt. Den som inte kan göra ett drag förlorar.



### Exempel 5 - Grönröd Hackenbush

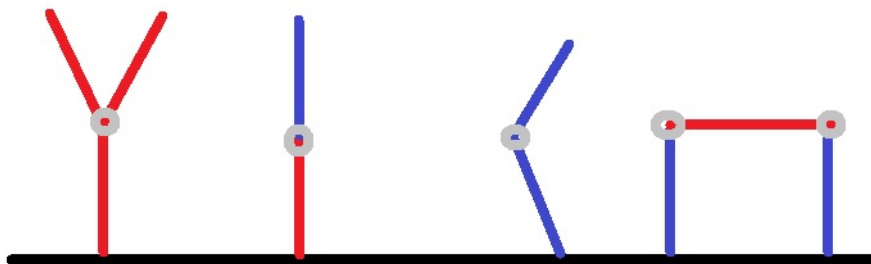
Det här spelet fungerar precis som Hackenbush förutom att spelarna kallas blå och röd, och varje spelare får bara klippa grenar av sin egen färg.



## Förberedelseuppgifter

Förbered dig inför passet genom att försöka lösa några av följande uppgifter. Man kan även vara med på passet utan att ha gjort uppgifterna

1. Vi modifierar "plocka stenar" spelet ovan så att man i ett drag istället får plocka 1,2,3, eller 4 stenar. Vad är den vinnande strategin nu, och kommer den första eller andra spelaren att vinna om båda spelar optimalt?
2. I spelet summa15 börjar A med att ta bricka 5 och B tar bricka 7. Detta är dock ett misstag - hitta en vinnande strategi för A utifrån denna spelposition.
3. Det är din tur i det gröna Hackenbush-spelet ovan. Beskriv en vinnande strategi!
4. Det är blå spelares tur i Domineering-positionen ovan. Vilket drag är bäst? Vilket drag är bäst om det vore röd spelares tur? Vem kommer att vinna?
5. Vem vinner i grönröd-hackenbush positionen nedan? Beror svaret på vems tur det är?



På passets ska vi se hur man kan räkna på denna typ av spel med något som kallas surreella tal.

## Lösningar till Förberedelseuppgifter

Man kan resonera kring uppgifterna på olika sätt, lösningarna nedan använder den typ av räkning som togs upp under passet.

1. En vinnande strategi är att alltid spela till ett antal stenar som är delbart med 5. Om det är tjugostenar från början vinner spelare två genom att alltid spela  $5 - x$  stenar när motspelaren tar  $x$  stenar.
2. Detta spel är tre-i-rad i en annan skepnad. A kan vinna genom att spela ta bricka 2, och när B blockerar med bricka 8 tar B bricka 6 och vinner p.g.a. det dubbla hotet att ta bricka 1 eller 4.

2	<del>7</del>	6
9	5	1
4	3	8

3. Symmetrisera trädets grenar genom att klippa till den högra grenen så att den ser exakt lika ut som den vänstra. Efter detta speglar man motspelarens drag på den motsatta grenen.
4. Med spelteori kan man utvärdera var och en av de olika tomma regionerna, då ser man att blå har ett ganska stort övertag, ungefär 4 drags övertag. Bästa draget är att spela i mitten av den nedre högra komponenten. Den komponenten har värdet  $\{2 | -\frac{1}{2}\}$  vilket inom spelteori brukar skrivas  $\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$ , man kan se det som att komponenten har medelvärde  $\frac{3}{4}$ , fast den som spelar först får en bonus av  $\frac{5}{4}$  (vilket kallas positionens temperatur). Den högra nedre komponenten har högst temperatur och därför tjänar man mest på att spela där först.
5. Det högra "huset" har värdet 1, eftersom den som börjar förlorar i spelet bestående av huset plus en röd pinne. Därför har hela positionen i uppgiften värdet  $-3 - \frac{1}{2} + 2 + 1 = -\frac{1}{2}$ , så röd vinner oavsett vem som börjar.