

Grafer

Jonathan Nilsson

Del I

Grafer

Vad är en graf?

Definition

En **graf** består av två mängder $G = (V, E)$, där elementen i V kallas grafens **noder** och där elementen i E kallas grafens **kanter**.

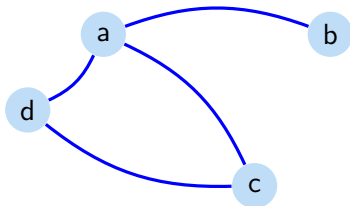
Om a och b är noder kan vi skriva ab för en kant mellan dem.

Exempel

Rita upp grafen $G = (V, E)$ där $V = \{a, b, c, d\}$ och $E = \{ab, ac, ad, cd\}$

Exempel

Rita upp grafen $G = (V, E)$ där $V = \{a, b, c, d\}$ och $E = \{ab, ac, ad, cd\}$



Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk
- Sjukdomsspridning

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk
- Sjukdomsspridning
- Länkning på internet

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk
- Sjukdomsspridning
- Länkning på internet
- Släktträd

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk
- Sjukdomsspridning
- Länkning på internet
- Släktträd
- Sökträd och spelteori

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk
- Sjukdomsspridning
- Länkning på internet
- Släktträd
- Sökträd och spelteori
- Ändliga automater

Modellering med grafer

Många problem kan abstraheras till problem inom grafteori

- Kartor
- Resvägar med flyg
- Sociala nätverk
- Sjukdomsspridning
- Länkning på internet
- Släktträd
- Sökträd och spelteori
- Ändliga automater
- Neurala nätverk

Gradtal

Definition

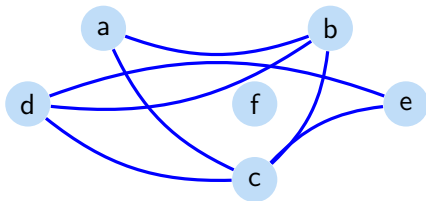
Låt $G = (V, E)$ vara en graf och låt $v \in V$. Vi definierar **graden** av v som antalet kanter som är kopplade till v .

Gradtal

Definition

Låt $G = (V, E)$ vara en graf och låt $v \in V$. Vi definierar **graden** av v som antalet kanter som är kopplade till v .

Exempel:

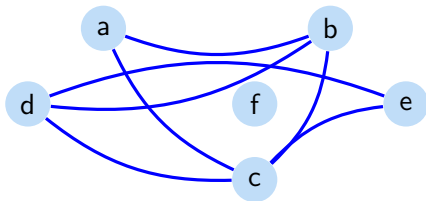


Gradtal

Definition

Låt $G = (V, E)$ vara en graf och låt $v \in V$. Vi definierar **graden** av v som antalet kanter som är kopplade till v .

Exempel:



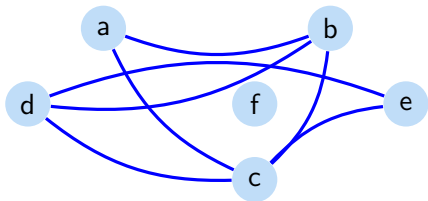
Nod	Grad
a	2
b	3
c	4
d	3
e	2
f	0

Gradtal

Definition

Låt $G = (V, E)$ vara en graf och låt $v \in V$. Vi definierar **graden** av v som antalet kanter som är kopplade till v .

Exempel:



Nod	Grad
a	2
b	3
c	4
d	3
e	2
f	0

Notera att summan av graderna är 2 gånger antalet kanter.

Kompletta grafer

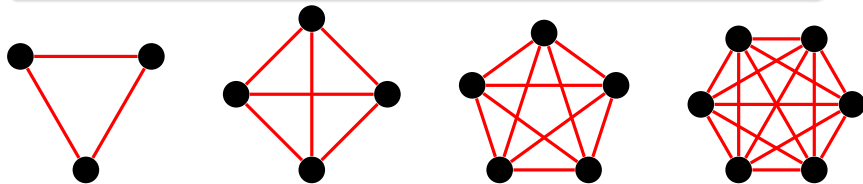
Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas komplett om grafen innehåller **alla kanter**. Vi skriver K_n för en komplett graf med n noder.

Kompletta grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas komplett om grafen innehåller **alla kanter**. Vi skriver K_n för en komplett graf med n noder.

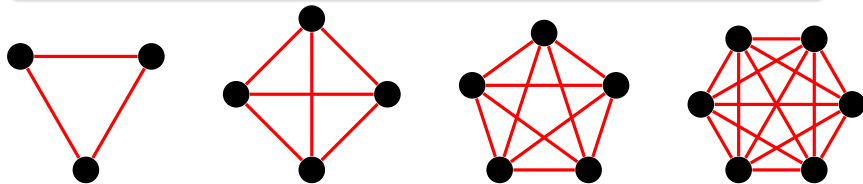


Graferna K_3 , K_4 , K_5 , och K_6 .

Kompletta grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas komplett om grafen innehåller **alla kanter**. Vi skriver K_n för en komplett graf med n noder.



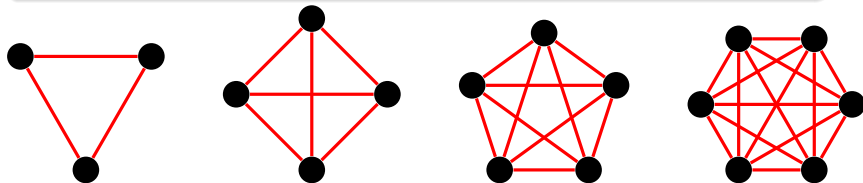
Graferna K_3 , K_4 , K_5 , och K_6 .

Hur många kanter har K_n ?

Kompletta grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas komplett om grafen innehåller **alla kanter**. Vi skriver K_n för en komplett graf med n noder.



Graferna K_3 , K_4 , K_5 , och K_6 .

Hur många kanter har K_n ?

K_n har $\binom{n}{2}$ kanter!

Bipartita grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **bipartit** om man kan dela upp nodmängden V i två delar V_1 och V_2 så att kanter endast går mellan de två mängderna, alltså varje kant har formen ab där $a \in V_1$ och $b \in V_2$.

Bipartita grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **bipartit** om man kan dela upp nodmängden V i två delar V_1 och V_2 så att kanter endast går mellan de två mängderna, alltså varje kant har formen ab där $a \in V_1$ och $b \in V_2$. Vi skriver $K_{m,n}$ för en graf där noderna kan delas upp i två mängder med m respektive n element i var mängd, och med så många kanter som möjligt.

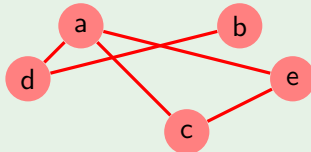
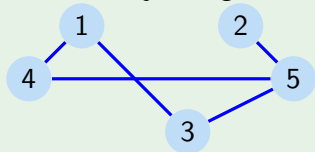
Bipartita grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **bipartit** om man kan dela upp nodmängden V i två delar V_1 och V_2 så att kanter endast går mellan de två mängderna, alltså varje kant har formen ab där $a \in V_1$ och $b \in V_2$. Vi skriver $K_{m,n}$ för en graf där noderna kan delas upp i två mängder med m respektive n element i var mängd, och med så många kanter som möjligt.

Exempel

- Rita upp graferna $K_{2,3}$ och $K_{3,3}$.
- Vilka av följande grafer är bipartita?



Del II

Vandring i grafer

Vandring i grafer

Definition

En **vandring** i en graf $G = (V, E)$ är ett sätt att förflytta sig mellan noder längs kanter. En vandring kan skrivas $a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$ där a_i är noder med kanter mellan sig.

Vandring i grafer

Definition

En **vandring** i en graf $G = (V, E)$ är ett sätt att förflytta sig mellan noder längs kanter. En vandring kan skrivas $a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$ där a_i är noder med kanter mellan sig. En vandring kallas **sluten** om $a_1 = a_n$, alltså om vägen börjar och slutar i samma nod.

Sammanhängande komponenter

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **sammanhängande** om det för varje par av olika noder kan hitta en vandring mellan dem.

Sammanhängande komponenter

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **sammanhängande** om det för varje par av olika noder kan hitta en vandring mellan dem.

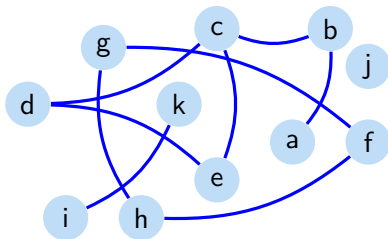
Varje graf kan brytas upp i ett antal **sammanhängande komponenter** som motsvarar delmängder av V .

Sammanhängande komponenter

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **sammanhängande** om det för varje par av olika noder kan hitta en vandring mellan dem.

Varje graf kan brytas upp i ett antal **sammanhängande komponenter** som motsvarar delmängder av V .

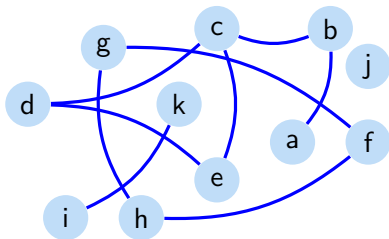


Sammanhängande komponenter

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **sammanhängande** om det för varje par av olika noder kan hitta en vandring mellan dem.

Varje graf kan brytas upp i ett antal **sammanhängande komponenter** som motsvarar delmängder av V .



Sammanhängande komponenter: $\{a, b, c, d, e\}$, $\{f, g, h\}$, $\{i, k\}$, $\{j\}$.

Del III

Vägar och Kretsar

Vägar och kretsar

Definition

En **väg** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring i G som inte använder samma **kant** flera gånger.

Vägar och kretsar

Definition

En **väg** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring i G som inte använder samma **kant** flera gånger. En **Eulerväg** i en graf G är en väg som passerar alla grafens kanter exakt en gång.

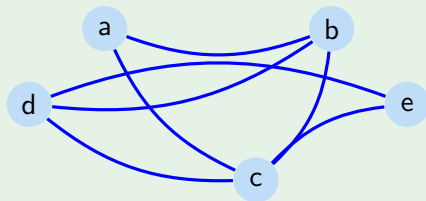
Vägar och kretsar

Definition

En **väg** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring i G som inte använder samma **kant** flera gånger. En **Eulerväg** i en graf G är en väg som passerar alla grafens kanter exakt en gång.

En **Eulerkrets** är en Eulerväg som är sluten, alltså en väg som passerar alla kanter och som börjar och slutar i samma nod.

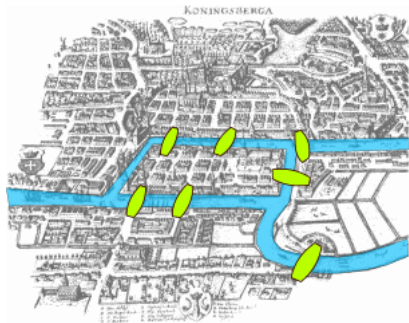
Exempel



I grafen ovan är $b - c - d - e - c - a - b - d$ en Eulerväg.
Eulerkretsar saknas.

Königsbergs sju broar

På Eulers tid såg staden Königsberg ut som på bilden. Euler frågade sig om man på sin söndagspromenad kunde gå genom staden på ett sådant sätt att man korsar var och en av stadens sju broar exakt en gång och kommer tillbaka hem. Euler bevisade att detta var omöjligt, något som ses som grafteorin uppkomst.



Del IV

Stigar och Cykler

Stigar och Cykler

Definition

En **stig** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring i G som inte använder samma **nod** flera gånger.

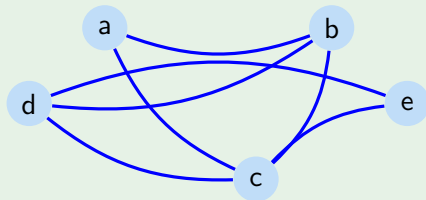
Stigar och Cykler

Definition

En **stig** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring i G som inte använder samma **nod** flera gånger. En sluten stig kallas en **cykel**.

Exempel

Hitta alla stigar från d till e i grafen nedan.



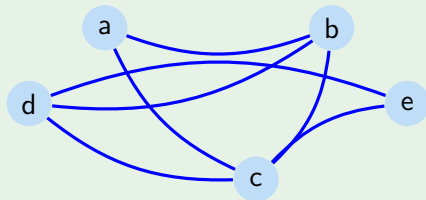
Stigar och Cykler

Definition

En **stig** i en graf $G = (V, E)$ är en vandring i G som inte använder samma **nod** flera gånger. En sluten stig kallas en **cykel**.

Exempel

Hitta alla stigar från d till e i grafen nedan.



$d - e$ och $d - c - e$ och $d - b - c - e$ och $d - b - a - c - e$

Hamiltonstigar och Hamiltoncykler

Definition

En **Hamiltonstig** i en graf G är en stig som passerar alla grafens noder exakt en gång.

Hamiltonstigar och Hamiltoncykler

Definition

En **Hamiltonstig** i en graf G är en stig som passerar alla grafens noder exakt en gång.

En **Hamiltoncykel** är en Hamiltonstig som återvänder till sin startpunkt.

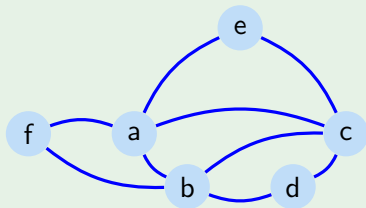
Hamiltonstigar och Hamiltoncykler

Definition

En **Hamiltonstig** i en graf G är en stig som passerar alla grafens noder exakt en gång.

En **Hamiltoncykel** är en Hamiltonstig som återvänder till sin startpunkt.

Exempel



$f - a - e - c - b - d$ en Hamiltonstig. $f - a - e - c - d - b - f$ är en Hamiltonkrets.

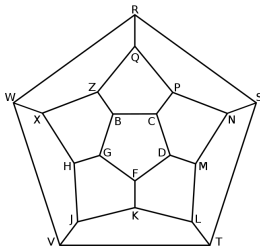
Hamiltons pussel

Matematikern och astronomen William Rowan Hamilton (1805-1865) producerade ett pussel bestående av en dodekaeder föreställande en jordglob med städer på hörnen. Målet var att hitta en Hamilton-cykel på globen!



Hamiltons pussel

Matematikern och astronomen William Rowan Hamilton (1805-1865) producerade ett pussel bestående av en dodekaeder föreställande en jordglob med städer på hörnen. Målet var att hitta en Hamilton-cykel på globen!



Del V

Riktade grafer och Multigrafer

Riktade grafer

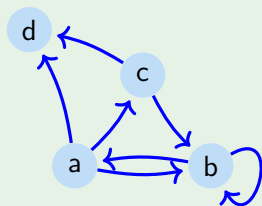
I en **riktad graf** har kanterna en riktning.

Riktade grafer

I en **riktad graf** har kanterna en riktning.

Exempel

Rita upp den riktade grafen G där $V = \{a, b, c, d\}$ och $E = \{ab, ac, cb, ba, ad, cd, bb\}$. Hitta krets av längd 4 i grafen. Hitta också en Hamiltonstig.

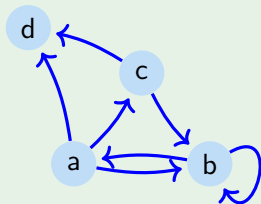


Riktade grafer

I en **riktad graf** har kanterna en riktning.

Exempel

Rita upp den riktade grafen G där $V = \{a, b, c, d\}$ och $E = \{ab, ac, cb, ba, ad, cd, bb\}$. Hitta krets av längd 4 i grafen. Hitta också en Hamiltonstig.

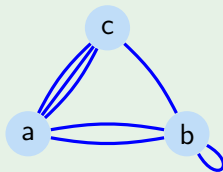


I exemplet är exempelvis $a - c - b - b - a$ en krets, och $c - b - a - d$ är en Hamiltonstig.

Multigrafer

Exempel

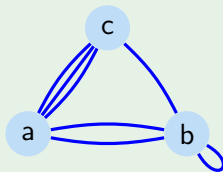
Rita upp multigrafen G där $V = \{a, b, c\}$ och $E = (ab, ab, ac, ac, ac, bc, bb)$. Hitta också en Hamiltoncykel och en Eulerväg i grafen.



Multigrafer

Exempel

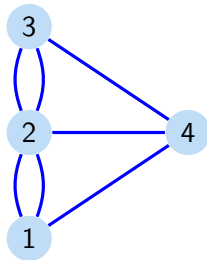
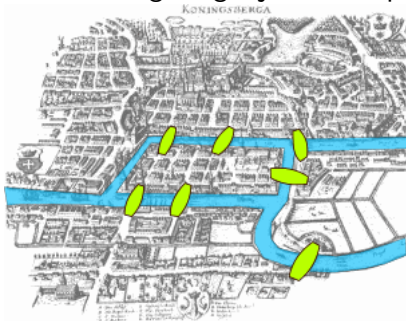
Rita upp multigrafen G där $V = \{a, b, c\}$ och $E = (ab, ab, ac, ac, ac, bc, bb)$. Hitta också en Hamiltoncykel och en Eulerväg i grafen.



Här ovan är exempelvis $a - b - c - a$ en Hamiltoncykel och $a - c - a - c - b - b - a - b$ är en Eulerväg.

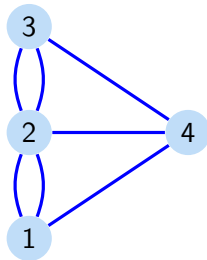
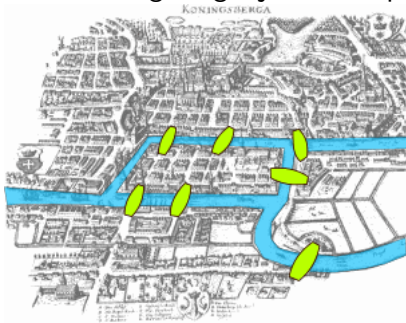
Tillbaka till Königsberg

Problemet med Königsbergs sju broar representeras bäst som en oriktad multigraf.



Tillbaka till Königsberg

Problemet med Königsbergs sju broar representeras bäst som en oriktad multigraf.



Finns det några Eulerkrets i grafen? Eulerväg?

Eulers sats

Sats

Låt G vara en graf eller multigraf som är sammanhängande.

- Det finns en Eulerkrets i G om och endast om varje gradtal är jämnt.
- Det finns en Eulerväg i G om och endast om max två gradtal är udda.

Eulers sats

Sats

Låt G vara en graf eller multigraf som är sammanhängande.

- Det finns en Eulerkrets i G om och endast om varje gradtal är jämnt.
- Det finns en Eulerväg i G om och endast om max två gradtal är udda.

Bevis: Stryk förbrukade kanter när du vandrar genom grafen. Varje gång man passerar en nod minskar man dess gradtal med två. Efter man gått en Eulerväg ska gradtalet vara noll i varje nod, alltså måste gradtalen varit jämna från början, förutom i start- och slut-noden om vägen inte är sluten.

Eulers sats

Sats

Låt G vara en graf eller multigraf som är sammanhängande.

- Det finns en Eulerkrets i G om och endast om varje gradtal är jämnt.
- Det finns en Eulerväg i G om och endast om max två graddatal är udda.

Bevis: Stryk förbrukade kanter när du vandrar genom grafen. Varje gång man passerar en nod minskar man dess gradtal med två. Efter man gått en Eulerväg ska gradtalet vara noll i varje nod, alltså måste gradtalen varit jämna från början, förutom i start- och slut-noden om vägen inte är sluten.

I Königsberg är gradtalen $(3, 5, 3, 3)$, så både Eulerkretsar och Eulervägar saknas!

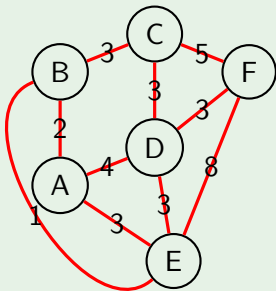
Viktade grafer

I en viktad graf har varje kant ett associerat värde.

Viktade grafer

I en viktad graf har varje kant ett associerat värde.

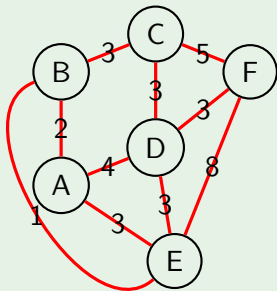
Exempel: Handelsresdandeproblemet



Viktade grafer

I en viktad graf har varje kant ett associerat värde.

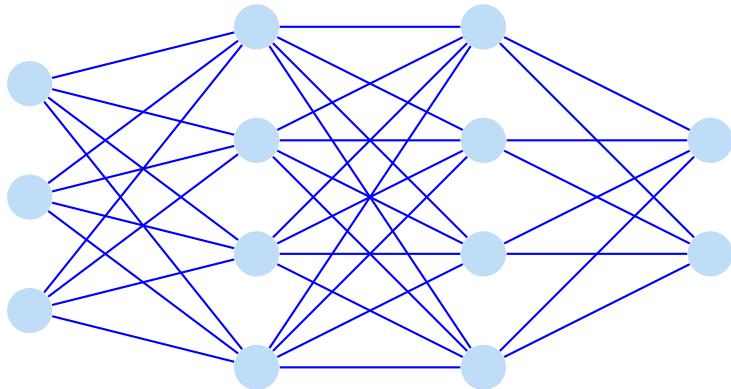
Exempel: Handelsresdandeproblemet



Hitta en Hamiltonstig av minimal kostnad.

Neurala nätverk

Varje kant har en associerad vikt, hur "stark" kopplingen mellan är mellan motsvarande neuroner.



Del VI

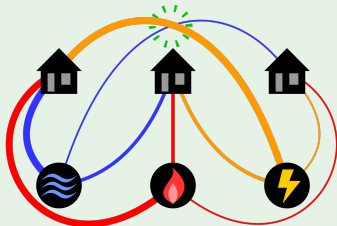
Planära grafer

En graf kallas **planär** om det går att rita utan på ett sådant vis att inga kanter korsas.

Three Utilities Problem

Exempel

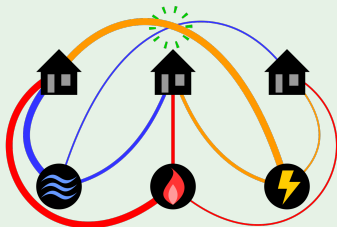
Tre hus ska förses med vatten, värme, och el utan att ledningarna korsas. Hur ska man dra ledningarna?



Three Utilities Problem

Exempel

Tre hus ska förses med vatten, värme, och el utan att ledningarna korsas. Hur ska man dra ledningarna?



Kuratowskis Sats

En graf är planär om och endast om den inte **innehåller** K_5 eller $K_{3,3}$.

Del VII

Att färga grafer

En **två-färgning** av en graf är ett sätt att färga noderna på grafen så att två noder med en kant mellan sig aldrig har samma färg.

En **två-färgning** av en graf är ett sätt att färga noderna på grafen så att två noder med en kant mellan sig aldrig har samma färg.

Fråga

Vilka av de platonska kropparna är två-färgbara?



Tetrahedron



Octahedron



Cube



Dodecahedron



Icosahedron

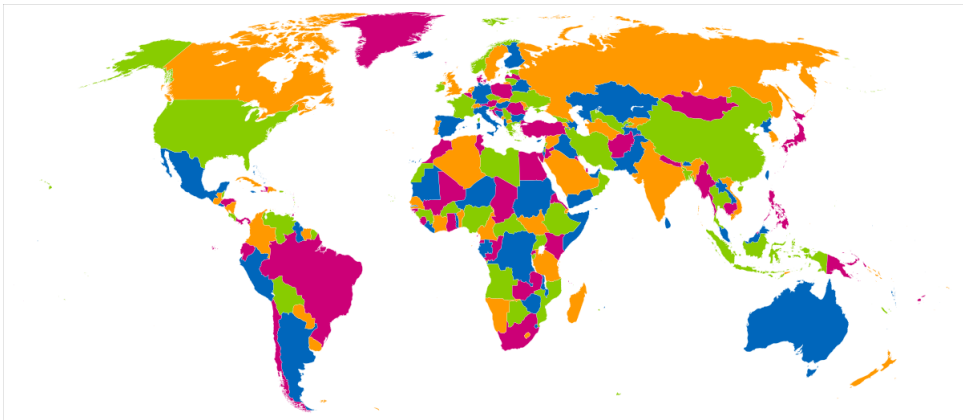
Att färga en karta

Hur många färger behövs för att färga länderna på en karta så att inga angränsande länder har samma färg?



Att färga en karta

Hur många färger behövs för att färga länderna på en karta så att inga angränsande länder har samma färg?



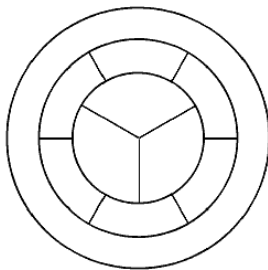
Ett motexempel?

Four color theorem disproof?

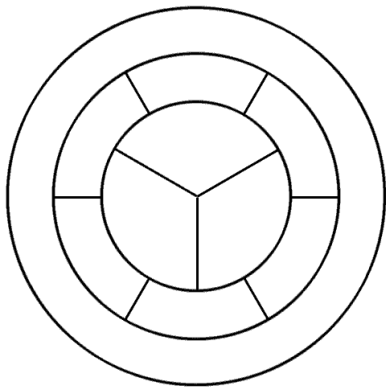
Asked 5 years, 5 months ago Modified 5 years ago Viewed 18k times

▲
41 My brother in law and I were discussing the four color theorem; neither of us are huge math geeks, but we both like a challenge, and tonight we were discussing the four color theorem and if there were a way to disprove it.

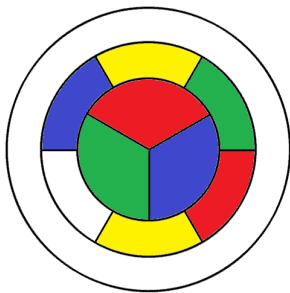
▼
14 After some time scribbling on the back of an envelope and about an hour of trial-and-error attempts in Sumopaint, I can't seem to come up with a pattern that only uses four colors for this "map". Can anyone find a way (algorithmically or via trial and error) to color it so it fits the four color theorem?



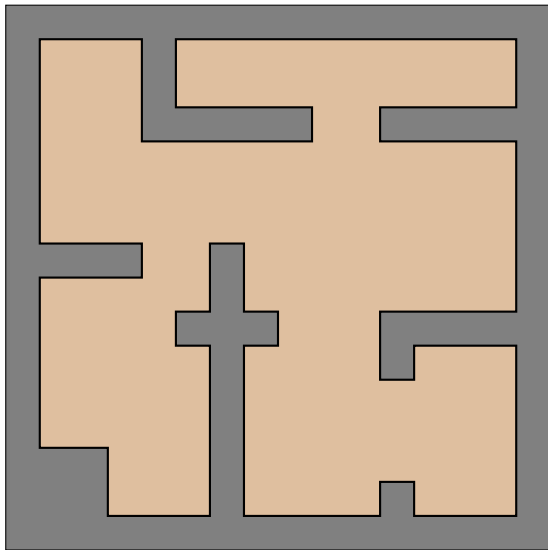
Ett motexempel?



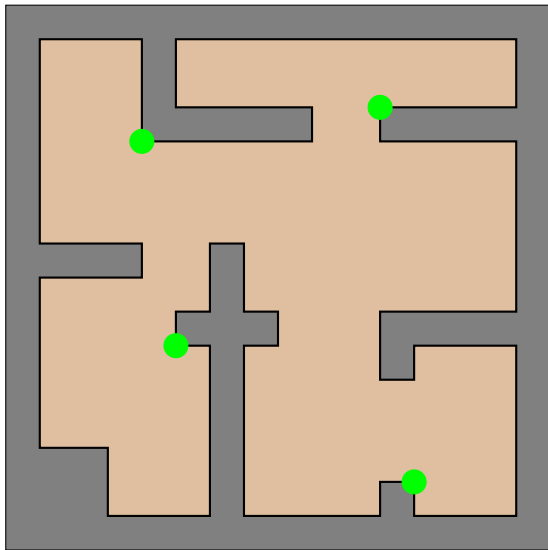
Ett motexempel?



Hur många kameror behövs i museet?



Hur många kameror behövs i museet?

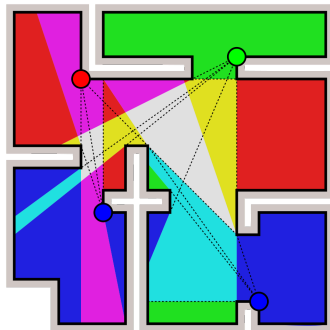


Musei-problemet

Hur många videokameror behövs i ett museum?

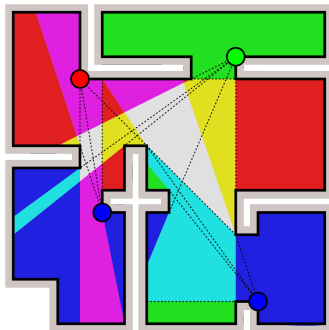
Musei-problemet

Hur många videokameror behövs i ett museum?



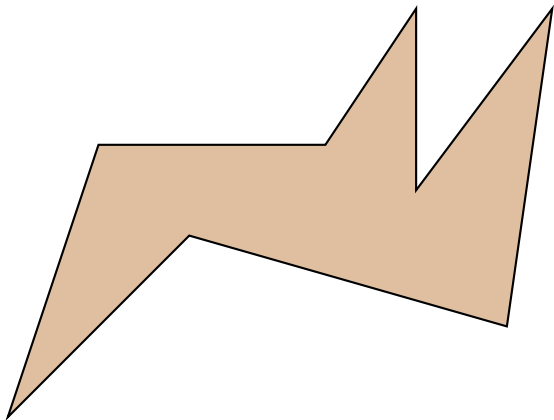
Musei-problemet

Hur många videokameror behövs i ett museum?

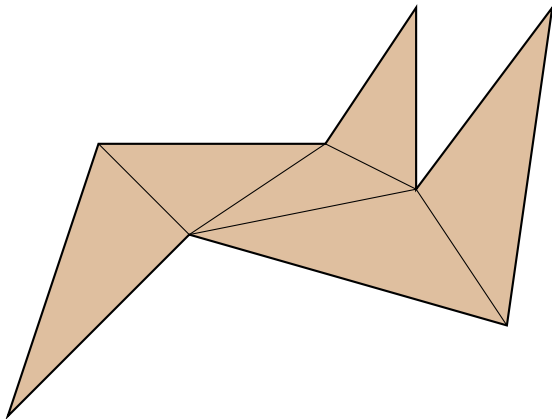


Resultat (Chvátal/Fisk): En tredjedel så många kameror som hörn räcker alltid (men ibland går det med färre)

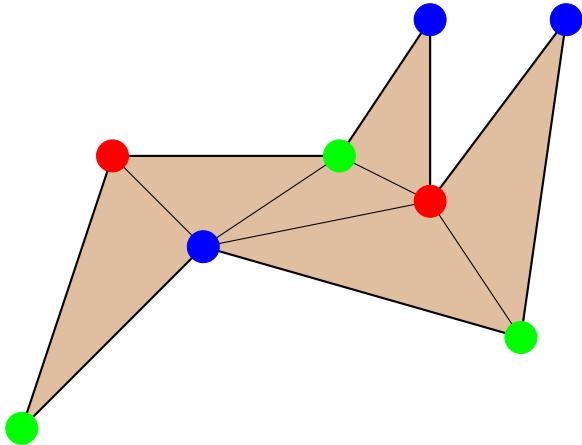
Hur många kameror behövs i museet?



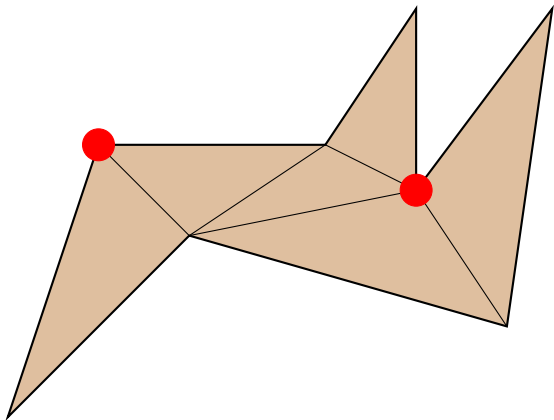
Hur många kameror behövs i museet?



Hur många kameror behövs i museet?



Hur många kameror behövs i museet?



Färga kanterna

En 2-kant-färgning är en färgning av grafens kanter så att två kanter som delar en nod aldrig har samma färg.

Färga kanterna

En 2-kant-färgning är en färgning av grafens kanter så att två kanter som delar en nod aldrig har samma färg.

Uppgift

Visa att i en grupp med 6 personer så finns det alltid en grupp av tre där antingen alla känner varandra eller ingen känner varandra.

Färga kanterna

En 2-kant-färgning är en färgning av grafens kanter så att två kanter som delar en nod aldrig har samma färg.

Uppgift

Visa att i en grupp med 6 personer så finns det alltid en grupp av tre där antingen alla känner varandra eller ingen känner varandra.

" K_5 är 2-kant-färgbar"

Fråga

Hur många personer måste jag ha i en grupp för att vara säker på att det finns en grupp av 5 personer som alla känner eller inte känner varandra?

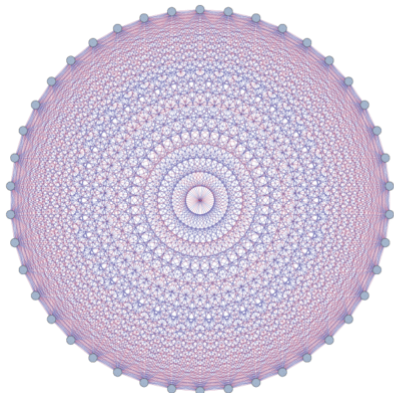
Fråga

Hur många personer måste jag ha i en grupp för att vara säker på att det finns en grupp av 5 personer som alla känner eller inte känner varandra?

Fråga

Hur många personer måste jag ha i en grupp för att vara säker på att det finns en grupp av 5 personer som alla känner eller inte känner varandra?

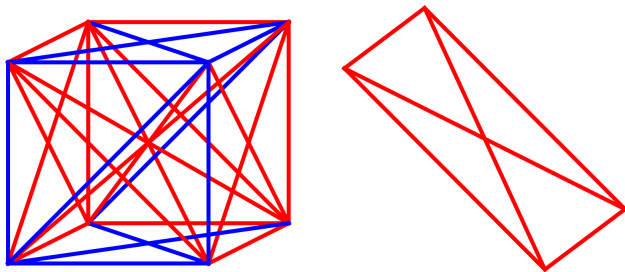
Svaret är okänt, men man vet att svaret ligger mellan 43 och 48.



```
0011100000001110110110111011100000000110
0001110000000001110110111110110111000000011
1000111000000001110110111011011011100000001
110001110000000000011101101100011011011100001000
11100011100000000000011101101100110110111000000
01110001110000000000011101101111111011011100000
0011100011100000000001110110111111101101110000
000111000111000000000111011011001100110111000
000011100011100000000001110110110011011011100
0000011100011100000000011101101101101101110
0000011100011100000000011101101101110110111
000000111000111000000001110110110011011011011
100000000111000111000000001110110110011011011
110000000011100011100000001110110110111011011
11100000001110001110000000111011011111011011
011100000011100011100000001110110111011011011
101110000001110001110000000111011011011011011
1101110000000111000111000000011101101111111
1011011100000001110001110000000111011011111
10110111000000011100011100000001110110110110
011011011011100000001110001110000000111011011
111011011011100000001110001110000000111011011
1111011011011100000001110001110000000111011011
110011011011011100000001110001110000000111011011
0110011011011011100000001110001110000000111011
100111011011011100000001110001110000000111011
110111110110110111000000011100011100000001110
011011101101101101110000000111000111000000011
101101100110110110111000000011100011100000001
110110110011011011011100000001110001110000000
111011011101101101101110000000111000111000000
0111011011011011011100000001110001110000000
0011101101100110110111000000011100011100000
000111011011011011011100000001110001110000
00001110110110111111011011100000001110001110
00001110110110111111011011100000001110001110
000000111011011011001101101110000000111000111
0001000111011011001101101110000000111000111
10000000011101101101110110110111000000011100011
110000000111011011111101101101110000000111000
0110000000111011011101101101110000000111000
```

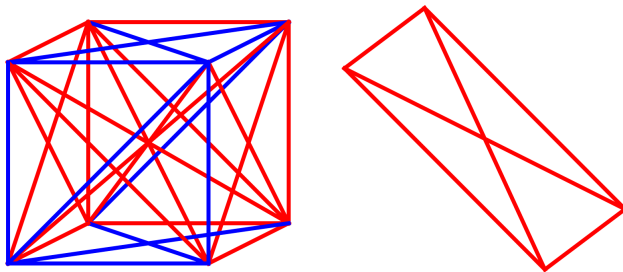
Ramsey teori

Färga kanterna i en n -dimensionell hyperkub i rött och blått. Hur stort måste n vara för att grafen garanterat ska innehålla en enfärgad K_4 i samma plan?



Ramsey teori

Färga kanterna i en n -dimensionell hyperkub i rött och blått. Hur stort måste n vara för att grafen garanterat ska innehålla en enfärgad K_4 i samma plan?



Svar: Man vet att svaret är mindre än Grahams tal G