Pass 3: Grafer

• MatteGym • Malmö Universitet • VT 2022 •

https://mattegym.uni.mau.se

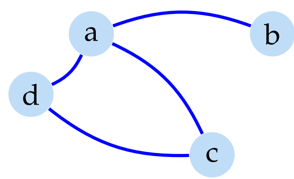
Jonathan Nilsson och Magnus Jakobsson

Senast uppdaterad 5 april 2022

Grafer

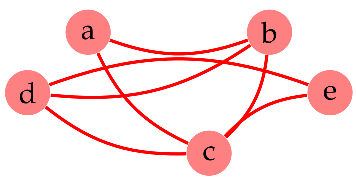
Definition. *En* **graf** $G = (V, E)$ *består av en mängd* **noder** V *och en mängd* **kanter** E *mellan vissa av noderna.*

Om exempelvis $G = (V, E)$ där $V = \{a, b, c, d\}$ och $E = \{ab, ac, ad, cd\}$ så kan grafen ritas som till höger. Man kan också rita den på andra sätt - det är inte positionen eller namnen på noderna som är viktiga utan endast vilka som är kopplade till varandra. Grafer är användbara när man har en mängd objekt som är relaterade till varandra, de dyker exempelvis upp i datanätverk, släktträd, neurala nätverk, spelträd o.s.v.



Grafteoretiska begrepp

Graden av en nod i en graf är antalet kanter kopplade till noden. I exemplet ovan har a grad 3, b har grad 1, medan c och d båda har grad 2. En **vandring i en graf** är en följd noder sammanlänkade med kanter. Exempelvis är $a - c - d - a - b$ en vandring i grafen ovan. Längden av vandringen är antalet steg man tar, fyra i föregående exempel. En graf kallas **sammanhängande** om man kan vandra mellan alla par av noder. En **sluten** vandring är en vandring som börjar och slutar i samma nod. En **Eulerväg** är en vandring i en graf som använder varje **kant** precis en gång. En **Hamiltonstig** är en vandring som besöker varje **nod** precis en gång. En sluten Eulerväg kallas för en **Eulerkrets** och en sluten **Hamiltonstig** kallas för en Hamiltoncykel.



$a - b - c - d - e$ är en Hamiltonstig i grafen till vänster, medan $b - a - c - b - d - e - c - d$ är en Eulerväg. Som Hamiltoncykel kan man ta $a - b - d - e - c - a$ (här räknas det som att man bara besökt a en gång när man både börjar och slutar där). Grafen saknar Eulerkretsar.

Varianter på grafer

I en **multigraf** tillåter man flera kanter mellan samma nod, och även kanter från en nod till sig själv. I en **riktad graf** har kanterna en riktning, och vandringar är bara tillåtna i denna riktning. I en **viktad graf** har varje kant ett värde, och ”kostnaden” för en vandring är summan av dessa viktor längs vandringen. Vilken typ av graf man använder beror på problemet som man vill modellera.

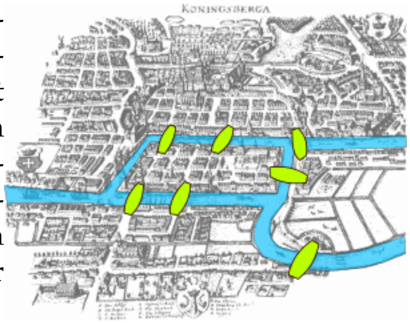
Förberedelseuppgifter

Förbered dig inför passet genom att försöka lösa några av följande uppgifter. Man kan även vara med på passet utan att ha gjort uppgifterna

Videotips: www.youtube.com/watch?v=PcinNu1Qq5g&channel=BlueVertex

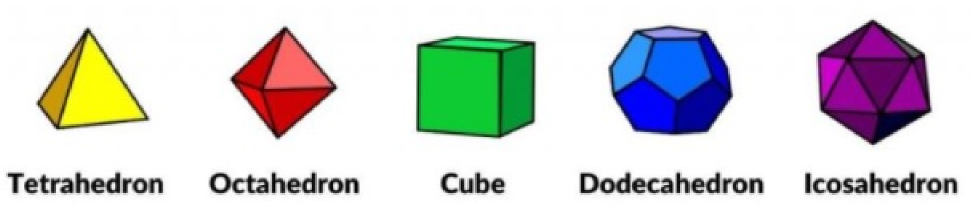
1. (a) Hitta en graf som har en Eulerväg men som saknar en Hamiltonstig.
   (b) Hitta en graf som har en Hamiltonstig men som saknar en Eulerväg.

2. På Eulers tid såg staden Königsberg ut som på bilden. Euler frågade sig om man på sin söndagspromenad kunde gå genom staden på ett sådant sätt att man korsar var och en av stadens sju broar exakt en gång och kommer tillbaka hem. Detta ses som grafteorin uppkomst. Rita en multigraf som beskriver Eulers problem. Går det att lösa Eulers problem? Om man tar bort villkoret att man ska återvända hem, går det då att lösa?

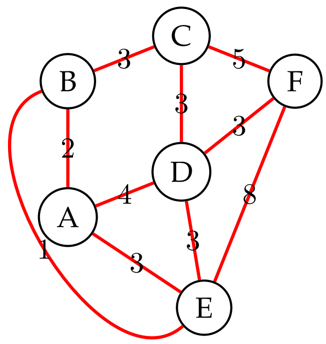


3. Visa att i en grupp med 6 personer så finns det alltid antingen tre personer som alla känner varandra eller tre personer där ingen av dem känner varandra.

4. Man säger att en graf är 2-färgbar om man med två färger kan färga noderna så att noder med en kant mellan sig alltid har olika färg. Vilka av de platonska kropparna är 2-färgbara? Vilka är 3-färgbara? (Kropparnas hörn är grafens noder och kanter är kanter).

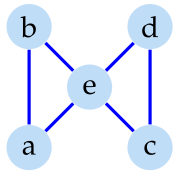


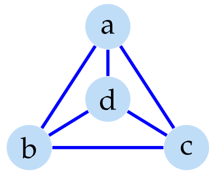
5. Handelsresandeproblemet (eng. The travelling salesman problem) är ett klassiskt problem. Man ska besöka ett antal städer, och antalet timmar det tar (eller kanske kostnaden) att resa varierar mellan städerna. Man vill besöka alla städer till en så låg kostnad som möjligt. Även för datorer är detta problem mycket svårt för större grafer. Hitta en Hamiltonstig av minimal kostnad i grafen till vänster.



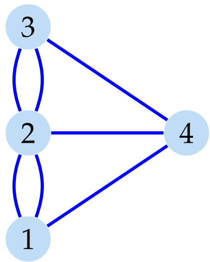
6. Rowan Hamilton publicerade på 1800-talet ett pussel i form av en dodekaeder-formad jordglob med städer i hörnen. Pusslet gick ut på att besöka alla städer en gång och återvända hem genom att resa längs kanterna. Lös Hamiltons pussel genom att först rita dodekaeder-grafen i planet så att inga kanter skär varandra.

1.

$a)$ 

$b)$ 

2. Eftersom alla noderna har udda gradtal saknas både Eulerväg och Eulerkrets.

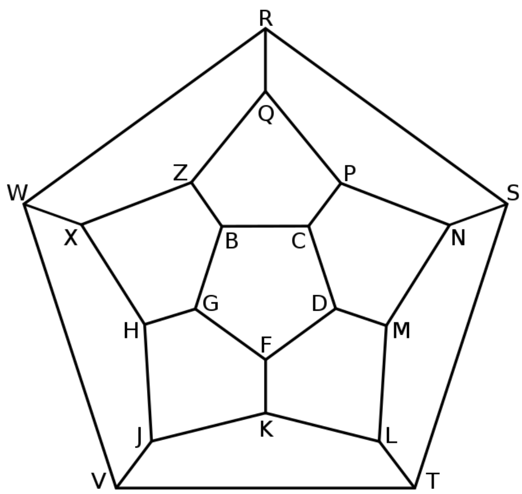


3. Rita en graf med 6 noder och kanter mellan alla par av personer. Antag att vi färgat kanterna blå eller röda beroende på om personerna känner varandra eller ej. Välj en person A, från denna går 5 kanter, så tre av dessa måste vara av samma färg, antag att de är blå. Om någon av kanterna mellan de tre personerna som känner A också är blå så har vi en blå triangel och är klara. Å andra sidan, om ingen av de tre personerna har en blå kant mellan sig så bildar de själva en röd triangel.

4. En triangel är inte 2-färgbar, så kroppar som innehåller en triangel -tetraedern, oktaedern, och ikosaedern är inte 2-färgbara. Inte dodekaedern heler - välj en av de femhörniga sidorna - när man går runt den måste man välja varannan färg, men eftersom 5 är udda blir första och sista samma färg. Kuben däremot är 2-färgbar vilket man ser om man börjar färga och använder varannan färg när man flyttar sig längs kanterna. Tetraedern är inte heller trefärgbar eftersom de 4 noderna alla är länkade till varandra. Dodekaedern kan trefärgas men inte ikosaedern, detta är dock svårare att visa. Det minsta antalet färger som krävs för att på detta vis färga en graf kallas för grafens **kromatiska tal**.

5. Vandringen $A - E - B - C - D - F$ har längd 13.

6. Projicera hörnen från en punkt precis ovanför dodekaederns topp, då ser den ut såhär i planet:



$R-W-V-T-S-N-M-L-K-J-H-X-Z-B-G-F-D-C-P-Q-R$ är en lösning.