

Pass 3: Grafer - Problemlösning

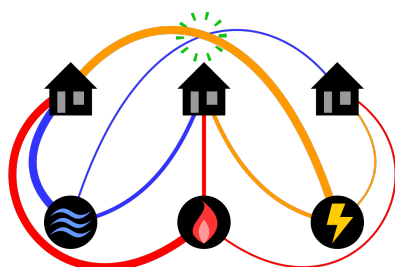
- MatteGym • Malmö Universitet • VT 2022 •
<https://mattegyim.uni.mau.se>
Jonathan Nilsson och Magnus Jakobsson
Senast uppdaterad 5 april 2022

Grafer

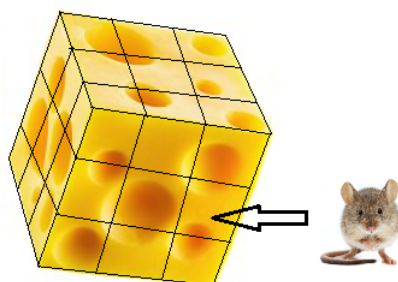
1. Längs en gata ligger tio hus på rad. En dag får familjen i hus 2 en gåva i form av en mycket ful tavla. Familjen vill inte behålla tavlan utan skänker den till sina grannar, som sedan skänker den vidare till en annan granne och så vidare. Med granne menas någon som bor högst två hus bort - första gången skänks alltså tavlan till hus 1, 3, eller 4. När man en gång gett tavlan till en viss granne kan man inte ge eller ta emot tavlan från samma granne igen. Vad kommer att hända med tavlan? Vem blir fast med den till slut?



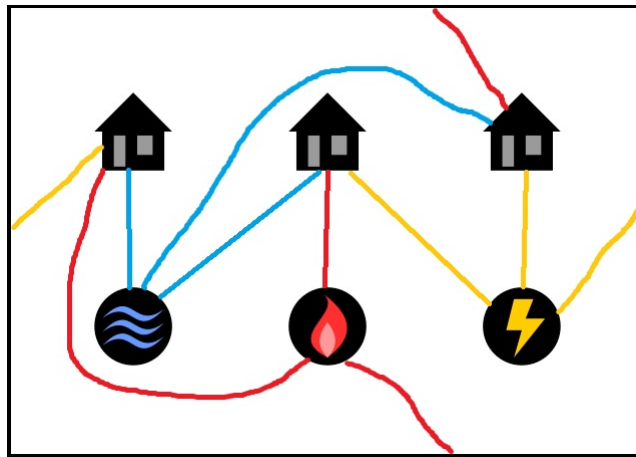
2. Tre hus ska försörjas med vatten, värme, och el från vattenverket, värmeverket, och elverket. Ledningarna får inte korsa varandra. Vi har sett att detta problem saknar lösning, men visa att problemet faktiskt går att lösa på en torus-formad planet!



3. En mus äter en kubisk ost av storlek $3 \times 3 \times 3$ (i någon enhet) genom att börja där pilen visar. Efter att musen ätit en $1 \times 1 \times 1$ ostbit flyttar den sig till en angränsande ostbit (alltså längs en av koordinataxlarna). Kommer musen att på detta sätt kunna äta hela osten? Hitta en väg för musen eller visa att det är omöjligt.



1. Låt husen vara noder och rita kanter mellan grannar, alltså hus på avstånd ett eller två har en kant mellan sig. Vi ser att nodernas **grader** är 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 2. De enda udda gradtalen är i hus två och nio, och varje gång tavlan passerar ett hus minskas gradtalet med 2. Eftersom tavlan börjar i hus 2 kommer den alltså att hamna i hus 9 oavsett vilken väg den tar. Samma argument fungerar oberoende av antalet hus.
2. Man kan rita en torus som en rektangel där vänster/höger samt topp/botten siter ihop - när man går ut till vänster kommer man alltså in till höger o.s.v som i ett dataspel. (För att se detta - ta torusen och klipp av den så att du får en böjd cylinder. Snitta sedan cylindern i höjdlängd och vik ut till en rektangel). Med denna identifikation av torus och rektangel kan man lätt rita en lösning:



Vik ihop igen så ser du lösningen på en torus.

3. Tänk på ostkuberna som noder där angränsande noder har en kant mellan sig. Denna graf är tvåfärgbar: noderna kan ses som punkter (x, y, z) där $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$. Då finns det en kant mellan två noder om en enda koordinat skiljer sig med 1. Färga kuben på position (x, y, z) röd om $x + y + z$ är ett udda tal och blå om $x + y + z$ är jämnt. Det finns 14 röda kuber och 13 blå. Eftersom musen börjar med att äta en blå kub och äter kuber av växlande färg så saknar problemet lösning.