Pass 4: Kombinatorik och sannolikhetslära

• MatteGym • Malmö Universitet • VT 2022 •
https://mattegym.uni.mau.se
Jonathan Nilsson och Magnus Jakobsson

Kombinatorik och sannolikhetslära

Inom den del av matematiken som brukar benämnas **kombinatorik** ställs vi ofta inför problem av typen:

”På hur många sätt går det att välja ut fem personer ur en grupp på tjugo personer” eller ”Tio personer ska beställa smörrebröd med antingen sill, rostbiff eller pannbiff. På hur många olika sätt kan deras beställning se ut?”

Centrala inom kombinatorik är bl a begreppen **fakultet, kombinationer** och **permutationer**.
Med ***n*-fakultet** menas produkten av alla tal from 1 tom *n*, dvs $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Observera skrivsättet med ett utropstecken.

Exempel: En kortlek kan blandas på **52!** olika sätt, ett ofantligt stort tal.

Antalet kombinationer betyder det antal sätt *k* föremål kan väljas ur *n* stycken: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Notera skrivsättet samt det faktum att detta är de s.k binomialkoefficienterna. Observera också att $\binom{n}{k}$ utläses ”n över k”.

Exempel: Att välja ut 5 personer ur en grupp på 20 går att göra på $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!(15)!} = 15504$ olika sätt. Vi tar här inte hänsyn till i vilken ordning de fem personerna väljs. Tex ska de fem personerna få göra en resa till Stockholm, och resten får stanna kvar i Malmö.

På liknande vis är antalet permutationer det antal sätt *k* föremål kan väljas ur *n* stycken om hänsyn tages till ordning.

Exempel: Om vi vill att ordningen på de fem personer vi väljer i exemplet ovan ska spela roll går detta att göra på $\frac{20!}{15!} = 1860480$ olika sätt. Tex ska var och en av de fem få en viss arbetsuppgift, och då spelar det roll om Pelle ska vara kassör eller sekreterare.

Kombinatorik är ofta kopplad till **sannolikhetslära**. Eftersom definitionen av sannolikhet för en händelse *A* är $P(A) = \frac{\text{antalet gynnsamma utfall}}{\text{totalt antal utfall}}$ beräknas täljare och/eller nämnare med hjälp av kombinatoriska verktyg.

Inom sannolikhetslära är **lådprincipen** ett användbart verktyg. Grovt sagt säger lådprincipen att om du har $a \cdot k + 1$ antal kulor som ska fördelas mellan k lådor kommer minst en låda att innehålla åtminstone $a+1$ kulor. Trots sin relativa enkelhet kan lådprincipen användas för att lösa många olika sorters problem.

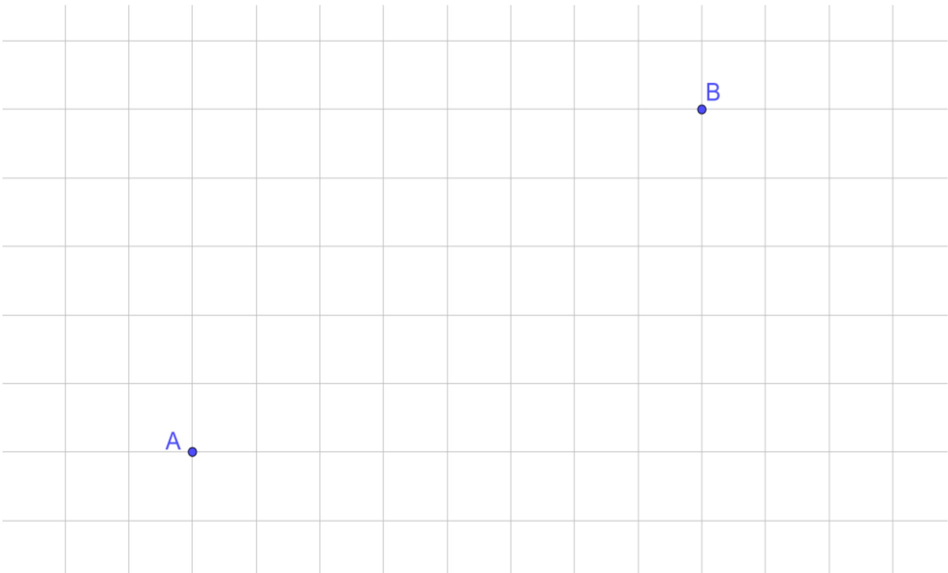
Förberedelseuppgifter:

Förbered dig inför passet genom att försöka lösa följande uppgifter. Man kan även vara med på passet utan att ha gjort uppgifterna, men vi kommer att gå djupare in i ämnet under passet, och därför är det bra om man hunnit bekanta sig med materialet innan.

1. Ur en grupp bestående av 12 människor (6 män och 6 kvinnor) ska det väljas 4 personer. På hur många sätt kan detta göras om
   a. inga övriga restriktioner finns.
   b. det måste ingå minst en kvinna bland dessa 4 personer
   c. de 4 personerna ska bestå av två personer av varje kön

2. Viveca har 9 t-shirts med olika tryck på. Under skolveckans fem dagar vill hon ha fem olika tröjor. På hur många sätt kan Viveca variera sig under veckan när det gäller val av t-shirt?

3. I bilden nedan står Anders i punkten A och han ska gå till Beata i punkten B genom att förflytta sig 13 ”steg” (genom att gå antingen till höger eller uppåt) längs med rutnätet. Ett sätt att komma från A till B på detta vis är först gå 8 steg åt höger och sedan 5 steg uppåt. Hur många olika ”vägar” med 13 steg är det möjligt för Anders att välja?



4. På en golvyta som har formen av en kvadrat med sidan 3 m befinner sig 10 personer. Visa att hur de än fördelar sig i rummet finns det alltid två personer som befinner sig mindre än 1,5 m ifrån varandra.

5. För fem positiva heltal a, b, c, d, e gäller att $a+b+c+d+e=24$. På hur många olika sätt kan 5-tupeln (a,b,c,d,e) se ut? Observera att $(20,1,1,1,1)$ och $(1,20,1,1,1)$ är olika 5-tuplar.