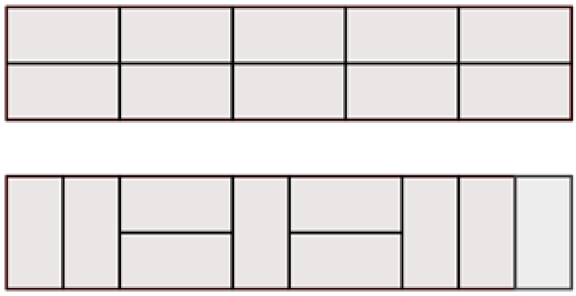
Uppgifter att jobba med under pass 2

1. Du har tillgång till 10 små rektanglar med måtten 1×2 längdenheter. Av dessa små rektanglar ska en stor rektangel med måtten 2×10 konstrueras. På hur många sätt är detta möjligt? Två olika sätt finns visat i figuren nedan.



Lösning 1: Om vi betecknar antalet sätt det går att göra en rektangel med måtten $2 \times n$ med A_n går det att inse att $A_{10} = A_9 + A_8$. Detta eftersom en rektangel med bas 10 antingen bildas som en rektangel med bas 8 + en ”dubbelbit” längst till höger eller som en rekyangel med bas 9 + en ”enkelbit” längst till höger. Detta mönster känns igen som Fibonaccitalföljden och eftersom $A_1 = 1 \text{ och } A_2 = 2$ blir $A_{10} = 89$.

Lösning 2: Ett kombinatoriskt alternativ. De horisontellt orienterade rektanglarna dyker alltid upp i par. Antal konfigurationer för:

0 horisontella: 1 st.

2 horisontella: $\binom{9}{1} = 9$ **st.**

4 horisontella: $\binom{8}{2} = 28$ **st.**

6 horisontella: $\binom{7}{3} = 35$ **st.**

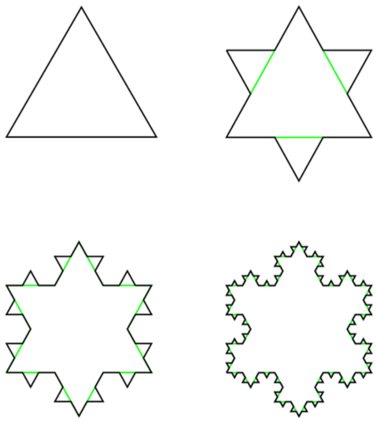
8 horisontella: $\binom{6}{4} = 15$ **st.**

10 horisontella: 1 st.

Summerar vi dessa antal får vi totalt 89 st stora rektanglar.

2. I bilden nedan visas de fyra första figurerna av den svenske matematikern Helge von Kochs s.k. Snöflinga. Figur 2 skapas genom att varje sida i figur 1 delas i tre delar, och den mittersta plockas bort. Denna ersätts sedan med två nya sidor enligt figuren. Mönstret upprepas sedan för varje ny figur. De gröna linjestyckena finns där för att visa hur den föregående figuren ser ut. Vi antar att arean av figur 1 nedan (triangeln) är 1 a.e.

   a. Bestäm arean av figur 4 nedan
   b. Bestäm arean av figur n då $n \to \infty$



Lösning: Vi tittar på den allmänna lösningen direkt, dvs b-uppgiften. Antalet kanter i figur *n* är $3 \cdot 4^{n-1}$ och arean för trianglarna som läggs till i figur *n* är $\frac{1}{9^{n-1}}$. Arean av figur *n* ges således av:

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$ **och summan är geometrisk (förutom den första termen), så** $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5/9}\right) = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$**.**

Lägg märke till att arean närmar sig 1,6 men att omkretsen går mot ∞.