# Talföljder och mönster

Mattegym, pass 2

# Triangeltalen

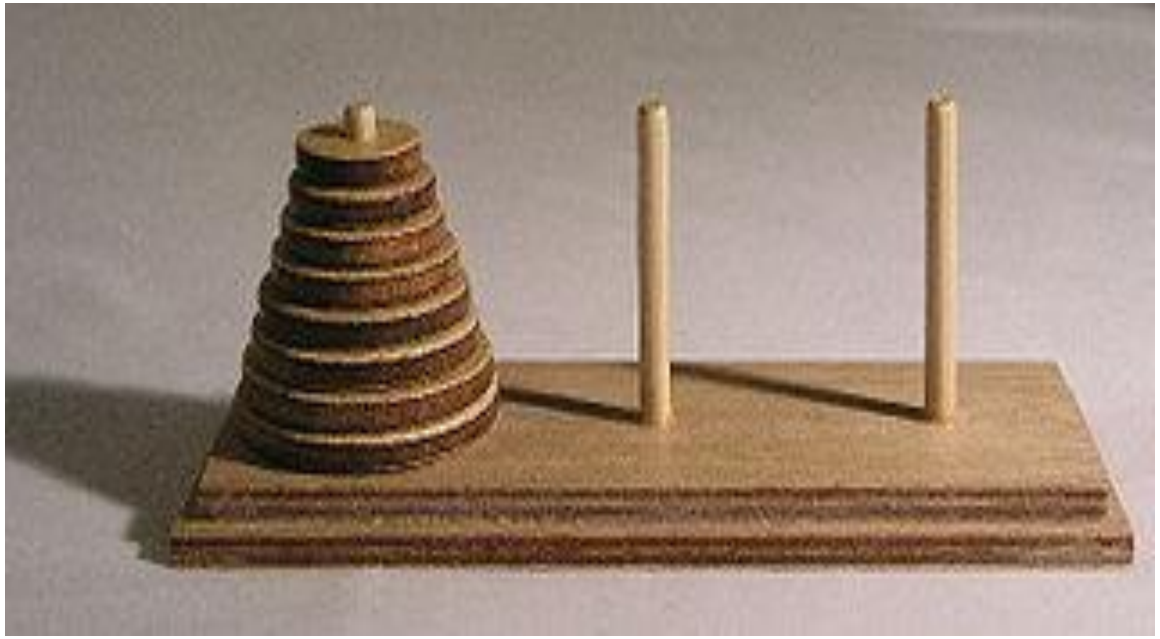
- Betrakta talföljden 1,2,3,4,5,…
- Summan av de *n* första positiva heltalen är $\frac{n(n+1)}{2}$
- Talföljden som beskriver denna summa har utseendet 1,3,6,10,15,…
- Dessa är de s.k. triangeltalen
- Dyker upp som antalet matcher i en turnering där alla möter alla, eller som antalet kanter i en komplett graf.
- Kan också ses som ”antalet sätt att välja 2 element av *n* stycken”
- Formeln går då att visa på ett mera ”konstruktivistiskt” sätt.

# Collatz talföljd

- En rekursiv talföljd enligt regeln $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, a_n \text{ jämn} \\ 3a_n + 1, a_n \text{ udda} \end{cases}$
- Med $a_1 = 33$ blir talföljden 33,100,50,25,76,38,19,58,29,88,44,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5, 16,8,4,2,1,4,2,1,4,2,1,….
- Vi ser att när vi kommer till 1 fastnar vi i en loop, så om talföljden ”landar” i 1 är vi färdiga.
- Kommer vi, oavsett val av $a_1$, alltid att hamna på 1?
- Ett öppet problem.

# Tornen i Hanoi

- Ett spel som går ut på att förflytta samtliga ringar från ett torn till ett annat, https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html
- Reglerna är att du bara får flytta en ring åt gången och aldrig får en större ring ligga ovanpå en mindre.
- Hur många förflyttningar klarar du dig med?
- Både den explicita och den rekursiva formeln kan vi plocka fram.
- $M_n = 2^n - 1$
- $M_n = 2M_{n-1} + 1, M_1 = 1$



# Fibonaccis talföljd

- En rekursivt bildad talföljd enligt $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Som starttal brukar väljas $F_0 = 0 \; och \; F_1 = 1$.
- Då blir talföljden 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,…
- Förekommer i naturen, tex i spiralformationer i kottar
- $\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \approx 1{,}618$ (oberoende av starttal)
- Det exakta värdet på det s.k. gyllene snittet är ganska enkelt att komma åt som en av två lösningar till en andragradsekvation.
- Det explicita uttrycket för $F_n$.

# Pascals triangel

- Ett talmönster som består av de s.k. binomialkoefficienterna.
- Döljer många spännande samband.
- Om vi summerar samtliga tal i en rad får vi summan $2^n$ om vi kallar den första ”ettan” för rad 0.
- Också detta går att inse på några olika sätt.
- Dels kan vi se summan som $(1+1)^n$.
- Vi kan också se det som *n* föremål med två val för varje föremål (på eller av).
- Kan du hitta Fibonacci-talen?

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$