Pass 1: Primtal

• MatteGym • Malmö Universitet • VT 2022 •

https://mattegym.uni.mau.se

Jonathan Nilsson och Magnus Jakobsson

Senast uppdaterad 15 februari 2022

Primtal och delbarhet

Vi säger att "5 delar 30", eftersom 30 kan delas in i 5 stycken lika stora heltalsdelar. Symbolisk skriver vi detta som $5|30$. Att $5|30$ är alltså ett påstående till skillnad från $\frac{5}{30}$ som är ett tal. Mer allmänt:

Definition. *Låt a och b vara två heltal. Vi skriver $a|b$ om $b = a \cdot c$ för något heltal c.*

Att $a|b$ kan man med ord säga som "a delar b"eller att "a är en delare till b"eller att "b är en multipel av a".

Enligt definitionen gäller alltså $5|30$ eftersom det finns ett tal c (nämligen 6) så att $30 = 5 \cdot c$. Det finns även fler tal som delar 30, här är en lista på alla:

$$-30, -15, -10, -6, -5, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$$

Ett **primtal** är ett heltal större än 1 som inte kan skrivas som en produkt av två mindre positiva heltal. De första primtalen är $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$

Heltal större än 1 som inte är primtal kallas för **sammansatta tal**. Dessa kan skrivas som en produkt av primtal, t.ex. är talet 12 produkten av tre primtal: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. När samma primtal förekommer flera gånger skriver man ofta detta med hjälp av exponenter:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad\qquad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Att på detta vis skriva ett tal som en produkt av primtal kallas att primtalsfaktorisera talet.

Den **största gemensamma delaren** till heltalen m och n är det största heltalet d med egenskapen att $d|m$ och $d|n$. Vi skriver $d = \gcd(m, n)$ för detta tal (från eng. greatest common divisor). Exempelvis har vi $\gcd(30, 42) = 6$ och $gcd(1000, 54321) = 1$.

Diofantiska ekvationer

En diofantisk ekvation är en ekvation där man endast accepterar lösningar som **heltal**.

Exempelvis har den diofantiska ekvationen $x^2 = 4$ två lösningar, $x = \pm 2$, men den diofantiska ekvationen $x^2 = 5$ saknar lösningar eftersom inga heltal x uppfyller ekvationen.

Den diofantiska ekvationen $y^2 = x^3 - x + 1$ beror på två variabler, så lösningar består av heltalspar (x, y) som uppfyller ekvationen. Exempevis är $(x, y) = (1, 1)$ en lösning, och $(x, y) = (3, 5)$ är en annan.

Förberedelseuppgifter

Förbered dig inför passet genom att försöka lösa följande uppgifter. Man kan även vara med på passet utan att ha gjort uppgifterna, men vi kommer att gå djupare in i ämnet under passet, och därför är det bra om man hunnit bekanta sig med materialet innan.

1. Basen och höjden i en rektangel ska vara heltal (mätt i cm). Om rektangelns area ska bli $6cm^2$ finns det fyra olika möjliga rektanglar (1×6, 2×3, 3×2, och 6×1). Hur många olika rektanglar finns det om arean ska bli...
   (a) $\ldots 32cm^2$?
   (b) $\ldots 2310cm^2$?
   (c) $\ldots 72cm^2$?
   (d) $\ldots n$ cm^2. Försök alltså hitta en allmän formel för antalet rektanglar utifrån primtalsfaktoriseringen för n.

2. Gäller $5|0$? Gäller $0|5$? Gäller $0|0$?
   Tips: Använd definitionen av delbarhet!

3. (a) Beräkna $\gcd(120, 18)$ genom att primtalsfaktorisera talen.
   (b) Beräkna $\gcd(1000000000, 246648060)$ med huvudräkning.

4. Primtalsfaktorisera talet 2022. Vilket är nästa primtalsår? Och vilket är nästa efter det?

5. En banan kostar 7kr och ett äpple kostar 5kr. Jag handlar bananer och äpplen för 47 kr.
   (a) Hur många bananer/äpplen har jag köpt? Finns det flera möjligheter?
   (b) Hitta *alla* lösningar till den diofantiska ekvationen $7x + 5y = 47$.